

平成27年度入学試験問題(前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

# 数 学 (前 期)

[1]  $a_n = \sum_{k=1}^n k 2^{n-k}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおく。

- (1) 和  $a_n$  を求めよ。  
 (2) 数列  $\{a_n\}$  を次のように 4 個ずつの群に分ける：

$$|a_1, a_2, a_3, a_4| |a_5, a_6, a_7, a_8| \dots$$

このとき、各群の 2 つ目の項以外の 3 数は、5 で割ったときの余りが等しいことを示せ。

[2] 平面上の三角形 ABC は二等辺三角形でないと仮定する。3 つの内角  $\angle A, \angle B, \angle C$  の対辺の長さをそれぞれ  $a, b, c$  とする。三角形 ABC の外接円を  $F$ , 外心を  $O$  とする。点 A における  $F$  の接線と直線 BC の交点を S とする。同様に点 B における  $F$  の接線と直線 CA の交点を T, 点 C における  $F$  の接線と直線 AB の交点を U とする。

- (1)  $\triangle SAB$  と  $\triangle SCA$  は相似であることを示し、2 つの三角形の面積の比を  $a, b, c$  を用いて表せ。  
 (2)  $\vec{OS} = \frac{c^2 \vec{OC} - b^2 \vec{OB}}{c^2 - b^2}$  を示せ。  
 (3)  $x\vec{OS} + y\vec{OT} + z\vec{OU} = \vec{0}$  を満たす 0 でない実数  $x, y, z$  の 1 組を  $a, b, c$  を用いて表せ。  
 (4) (3) で求めた  $x, y, z$  は  $x + y + z = 0$  を満たすことを示して、S, T, U は一直線上にあることを示せ。

[3] 円周  $x^2 + y^2 = 1$  の  $x > 0, y > 0$  の部分にある弧を  $C$  とする。C 上の点  $(\cos \theta, \sin \theta)$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) における C の接線を  $L_\theta$  とおく。また、実数  $a$  に対して曲線  $y = (x - a)^2 - \frac{1}{4}$  を  $P_a$  と表す。

- (1)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  である  $\theta$  に対して、 $L_\theta$  が  $P_a$  に接するような  $a$  が定まることを示し、 $a$  を  $\theta$  で表せ。  
 (2) (1) の  $a$  を表す  $\theta$  の関数のグラフの概形を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  で描け。  
 (3)  $P_a$  と接する  $L_\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) が存在するような  $a$  の範囲を求めよ。

[4]  $a, b$  を正の定数として、平面上の楕円  $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  を  $E$  とする。

- (1)  $E$  が直線  $y = x$  と接するとき  $b$  を  $a$  で表せ。また接点の  $x$  座標  $x_0$  を求めよ。  
 (2)  $E$  が (1) の条件を満たすとき、 $x \leq x_0$  を満たす  $E$  の部分と 2 直線  $y = x, y = 0$  とで囲まれる図形を、 $x$  軸の周りに回転させてできる立体の体積  $V$  を  $a$  を用いて表せ。

[5] はじめに袋の中に赤玉と青玉が 2 個ずつ入っている。次の試行を  $n$  回行う。

袋の中をよくかき混ぜてから玉を 1 個取り出す。その色が赤なら手元において、青なら袋に戻す。

$n \geq 1$  として、 $n$  回の試行の後に手元に残る赤玉の個数が 2, 1, 0 個である確率をそれぞれ  $p_n, q_n, r_n$  とする。

- (1)  $p_2, q_2, r_2$  を求めよ。  
 (2)  $p_3, q_3, r_3$  を求めよ。  
 (3)  $n \geq 2$  として、 $p_n, q_n, r_n$  のそれぞれを  $p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1}$  を用いて表せ。  
 (4)  $r_n$  を  $n$  を用いて表せ。  
 (5)  $p_n, q_n$  を  $n$  を用いて表せ。