

数学問題紙

平成 27 年 2 月 25 日

自 11:00

至 12:40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1 a と c は実数で $a > 0$ とする. また, 関数 $f(x)$ を次式で定義する.

$$f(x) = (x^2 + a)(x - a^2)^2 - cx^2$$

(1) 方程式 $f(x) = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ.

今後, 方程式 $f(x) = 0$ が 3 個の異なる実数解を持つ場合のみを取り扱う.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の 3 個の異なる実数解を a を用いて表せ.

(3) $y = f(x)$ のグラフのうち $f(x) \geq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とする. このとき $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{S(a)}{a^5}$ を求めよ.

2 p を $0 \leq p \leq 1$ をみたす実数とする。1個の白玉と3個の赤玉が入っている袋があり、この袋から1個の玉を取り出して、取り出した玉に新たに白か赤の玉を1個加えて袋に戻す試行を行う。ただし、この試行の際に加えられる新たな玉の色は

- ・ 確率 p で取り出した玉と同じ色
- ・ 確率 $1 - p$ で取り出した玉と異なる色

とする。

例えば、 $p = 1$ の場合、第1回目の試行において赤玉が取り出されると、取り出した赤玉に加えてもう一つ赤玉を袋に戻す。そして第1回目の試行が終わったときには、袋の中に1個の白玉と4個の赤玉が入っている。

第 n 回目の試行で白玉が取り出される確率を q_n とする。

(1) 第 n 回目の試行で新たに加えられた玉が白玉であり、かつこの白玉が $n + 1$ 回目の試行で取り出される確率を r_n 、 p 、 q_n を用いて表せ。

(2) q_{n+1} を n 、 p 、 q_n を用いて表せ。ただし $n + 1$ 回目の試行において、 n 回目に入れた玉を取り出さないという条件の下で、 $n + 1$ 回目に白玉を取り出す条件つき確率が q_n と等しいことを用いてよい。

(3) $r_n = q_n - \frac{1}{2}$ とおくとき、 r_{n+1} を n 、 p 、 r_n を用いて表せ。

(4) $p = 0$ 、 $p = \frac{1}{2}$ 、 $p = 1$ のときの q_n をそれぞれ n を用いて表せ。

3 三角形 ABC の重心を G, 内心を I とし, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする.
また直線 AI が辺 BC と交わる点を D とする.

(1) 線分 BD の長さを a, b, c を用いて表せ.

(2) 比 $AI : ID$ を a, b, c を用いて表せ.

今後, $a + b + c = 1$ とし, 三角形 BGC の面積を S , 三角形 BIC の面積を T とおく.

(3) $\frac{T}{S}$ を a を用いて表せ.

(4) $b < a < c$ とするとき, $\frac{T}{S}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

4

(1) 次の不定積分を求めよ.

① $\int t \sin t \, dt$

② $\int t^2 \cos t \, dt$

座標平面の原点を O とする. 点 $A(0, 1)$ を中心とし半径 1 の円 C 上の $x \geq 0$ の範囲にある点 $P(x_p, y_p)$ に対して, 線分 OP と x 軸の正の部分とのなす角を $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ とする. また, P における C の接線上に点 $Q(x_q, y_q)$ を次の条件をみたすようにとる.

- ・ $y_q \leq y_p$
- ・ 線分 PQ の長さは, C 上の弧 OP (ただし弧全体が $x \geq 0$ に存在する方) の長さに等しい
- ・ P の座標が $(0, 2)$ のときは $x_q = \pi$ となるように Q をとる
- ・ P が O と一致する場合は Q も O とし, $\theta = 0$ とする

(2) P の座標を θ を用いて表せ.

(3) Q の座標を θ を用いて表せ.

(4) P が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, y_q の最大値と最小値を求めよ.

(5) P が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, Q の描く曲線と y 軸および直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積を求めよ.