平 成 27 年 度

数　　学

問 題 冊 子

[1] $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とし，a, b, c は実数とする．$y = f(x)$ によって表される曲線を C とおく．C は x 軸と点 $(-1, 0)$ でのみ交わるとする．さらに，C の接線で傾きが -1 のものがただ一つ存在するとし，それを ℓ とする．

(1) $f'(-1) > 0$ となることを示せ．

(2) a の値の範囲を求めよ．

(3) C と ℓ の接点の x 座標が 1 であるとき，C と ℓ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

[2] (1) a は実数で $0 \leqq a \leqq \pi$ とする．

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\theta = 0$$

を満たす θ を求めよ．

(2) 連立不等式

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \cos y \geqq 0$$

によって表される xy 平面上の領域を図示せよ．

[3] xyz 空間の原点を O とし，点 $(0, 0, 1)$ と点 $(\sqrt{3}, 1, 1)$ を通る直線を ℓ とする．点 P は，時刻 $t = 0$ のとき $(-4, 0, 0)$ にあって，x 軸上を正の向きに速さ 1 で動いている．点 Q は，$t = 0$ のとき $(0, 0, 1)$ にあって，直線 ℓ 上を x 座標が増えるように速さ 2 で動いている．

(1) 点 P, Q の座標を t の式で表せ．

(2) 三角形 OPQ の面積 S を t の式で表せ．

(3) $-0.33 \leqq t \leqq 2.6$ のときの S の最大値と最小値，およびそれらをとる t の値を求めよ．

[4] あるバクテリアをある条件の下で培養した場合，生存している 1 個が，1時間後には1回分裂して2個ともに生存しているか，あるいは死滅しているかであり，2 個とも生存している確率が p，死滅している確率が $1-p$ であるという．このバクテリアがこの条件の下で最初1個生存していたとき，n 時間後に1個以上生存している確率を P_n とおく．ただし，n は自然数とする．

(1) P_2, P_3 をそれぞれ p の式で表せ．

(2) P_{n+1} を p と P_n の式で表せ．

(3) $p=\dfrac{1}{3}$ のときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ．

(4) a を 2 より大きな実数とする．$p=\dfrac{a-1}{a}$，$Q_n=P_n-\dfrac{a-2}{a-1}$ としたとき，$0<Q_{n+1}<Q_n$ であることを示せ．

(5) p が (4) と同じときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n$ を求めよ．