

# 平成 28 年度一般入試前期日程

## 数 学 問 題 紙

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は、2 ページあります。
3. 解答用紙は 4 枚、草案紙は 1 枚あります。
4. 受験番号は、監督者の指示に従って、全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入下さい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出下さい。問題紙、草案紙は持ち帰り下さい。

**問題 1**  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

問 1  $\tan x \leq x + 1 - \frac{\pi}{4}$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ) が成り立つことを示せ.

問 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  を求めよ.

問 3  $I_n + I_{n+2}$  の値を  $n$  を用いて表せ.

問 4 問 3 までの結果を用いて, 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$  の和を求めよ.

**問題 2** 原点  $O$  を中心とする単位円周上に  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ , および  $y > 0$  を満たす動点  $C(x, y)$  がある.  $\angle BAC = \theta$  とするとき, 次の問いに答えよ.  
ただし,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする.

問 1  $\triangle ABC$  の面積を  $\theta$  を用いて表せ.

問 2  $\triangle ABC$  の内接円  $O_1$  の半径  $r_1$  を  $\theta$  を用いて表せ.

問 3  $x$  軸, 辺  $AC$  の延長線, および辺  $BC$  とそれぞれ接する円  $O_2$  を考える.  
 $x$  軸上の接点を  $D$ , 辺  $AC$  の  $C$  側の延長上の接点を  $E$ , そして辺  $BC$  上の接点を  $F$  とする.

(1)  $AD$  の長さを  $\theta$  を用いて表せ.

(2) 円  $O_2$  の半径  $r_2$  を  $\theta$  を用いて表せ.

(3) 円  $O_1$  の中心を  $I$ , 円  $O_2$  の中心を  $J$  とする.  $\frac{r_2}{r_1} = 2$  となるとき,  $\triangle OIJ$  の面積を求めよ.

**問題 3**  $a$  を正の実数とする. 点  $P$  は曲線  $C_a : y = e^{ax}$  上を, 点  $Q$  は直線  $y = x$  をそれぞれ動く. このとき, 次の問いに答えよ.

問 1 曲線  $C_a$  と直線  $y = x$  が共有点をもたないような  $a$  の値の範囲を求めよ.

問 2 問 1 で求めた範囲にある  $a$  に対して, 線分  $PQ$  の長さの最小値を  $d(a)$  とする.  $PQ$  の長さが  $d(a)$  となる曲線  $C_a$  上の点を  $P_a$  とする.

(1)  $d(a)$  を求めよ.

(2) 点  $P_a$  における曲線  $C_a$  の接線の傾きを求めよ.

(3)  $a$  が問 1 で求めた範囲を動くときの点  $P_a$  の軌跡を求め, その概形を図示せよ.

問 3  $d(a)$  の最大値と, そのときの  $a$  の値を求めよ.

**問題 4**  $A$  の袋には赤玉 5 個, 白玉 1 個が入っている.  $B$  の袋には赤玉 2 個, 白玉 2 個が入っている. この 2 つの袋は見た目では区別できないものとする. このとき, 次の確率を求めよ.

問 1 2 つの袋からそれぞれ 2 個ずつ, 合計 4 個の玉を取り出すとき, 赤玉が 3 個以上である確率

問 2 どちらか一方の袋を選んで 1 個の玉を取り出すとき, それが赤玉である確率

問 3 どちらか一方の袋を選んで 2 個の玉を取り出すとき, 1 個でも白玉があれば「袋  $B$  を選んだ」と判断する. 袋  $A$  を選んで取り出したときに「袋  $B$  を選んだ」と判断してしまう確率