C－1

平成28年度入学者選抜学力検査問題

数　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は12頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

1 1 個のさいころを 2 回投げ，最初に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。2 次方程式　$x^2-ax+b=0$　について，次の問いに答えよ。

(1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2) 実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。

(3) 実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。

2 座標平面上に 5 点 O(0, 0), A(5, 0), B(0, 11), P(m, 0), Q(0, n) をとる。ただし，m と n は $1 \leqq m \leqq 5$, $1 \leqq n \leqq 11$ を満たす整数とする。

(1) 三角形 OAB の内部に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点のことであり，内部には辺上の点は含まれない。

(2) 三角形 OPQ の内部に含まれる格子点の個数が三角形 OAB の内部に含まれる格子点の個数の半分になるような組 (m, n) をすべて求めよ。

3 座標平面上に 5 点 $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$, $E\left(0, \frac{2}{3}\right)$ がある。点 E と点 $P_1(s, 1)$ $(0 < s < 1)$ を通る直線を ℓ_1 とする。直線 $y = 1$ に関して ℓ_1 と対称な直線を ℓ_2 とし，ℓ_2 と 直線 $x = 1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x = 1$ に関して ℓ_2 と対称な直線 ℓ_3 は x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1) 直線 ℓ_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2) 線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3) $EP_1 + P_1P_2 + P_2P_3$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で，点 P は放物線 $y = -x^2 + 2$ 上を動き，点 Q は放物線 $y = x^2 - 2$ 上を動く。ただし，P と Q は異なる点とする。

(1) 直線 PQ が原点を通るとき，線分 PQ の長さの最大値と最小値を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

5 座標平面上にすべての内角が 180° 未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は $0 \leqq k \leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s，t，u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC，BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC，AM の長さを用いて答えよ。

6 a は $0 < a < 2$ を満たす定数とする。$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}(t, 0)$，$\mathrm{B}(2, t^2)$，$\mathrm{C}(2-t, 2)$，$\mathrm{D}(0, 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。

7 数直線上の点 Q は，はじめは原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が $x=a$ にあるとき，

- 出た目が 1 ならば $x=a$ にとどまる。
- 出た目が 2，3 ならば $x=a+1$ へ動く。
- 出た目が 4，5，6 ならば $x=0$ に戻る（$a=0$ ならば動かない）。

(1) 整数 $a \geqq 0$ に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が $x=a$ にある確率を求めよ。

(2) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=0$ にある確率を求めよ。

(3) さいころを n 回投げたとき，Q が $x=1$ にある確率を求めよ。

$\boxed{8}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において，不等式 $\log x < x$ を示せ。

(2) $1 < a < b$ のとき，不等式

$$\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b} < \frac{b-a}{a(\log a)^2}$$

を示せ。

(3) $x \geqq e$ において，不等式

$$\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2}$$

を示せ。ただし，e は自然対数の底である。

$\boxed{\mathbf{9}}$ $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位) とおく。

(1) $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ 2 点 O(0, 0), A(0, 2) を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く。点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする。点 Q を通り x 軸と平行な直線と，点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする。点 P の軌跡を C とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) 正の実数 a に対して，C と x 軸と 2 直線 $x = a, x = -a$ によって囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。このとき, $\lim_{a \to \infty} V(a)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{11}}$ 曲線 $C : y = \sin x$ 上を点 $\mathrm{P}(t, \sin t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が動く。正の実数 r に対して，P における C の接線上に $\mathrm{PQ} = r$ となるように点 Q をとる。ただし，Q の x 座標は t よりも大きいとする。

(1) Q の座標を求めよ。

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ のときに Q の y 座標が最大となるような r の値を求めよ。

12 p を 2 でない素数とし，自然数 m，n は

$$(m+n\sqrt{p})(m-n\sqrt{p})=1$$

を満たすとする。

(1) 互いに素な自然数の組 (x, y) で

$$m+n\sqrt{p}=\frac{x+y\sqrt{p}}{x-y\sqrt{p}}$$

を満たすものが存在することを示せ。

(2) x は (1) の条件を満たす自然数とする。 x が p で割り切れないことと，m を p で割った余りが 1 であることが，同値であることを示せ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す番号の問題に解答すること。

<table>
<tr><th>科目</th><th colspan="2">学 部 ・ 学 科 等</th><th>解答する問題番号</th></tr>
<tr><td>数学 I
数学 A</td><td>教育学部</td><td>小学校教員養成課程
（音楽・図工・体育を除く）
特別支援教育教員養成課程
幼稚園教員養成課程
中学校教員養成課程
（技術科教育分野）</td><td>1 2 3 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">数学 I
数学 II
数学 A
数学 B</td><td>文学部
法政経学部
国際教養学部
園芸学部
先進科学プログラム</td><td>人文学科（行動科学コース）

物理化学・生命化学関連分野
人間科学関連分野</td><td>1 3 5 6</td></tr>
<tr><td>教育学部</td><td>中学校教員養成課程
（数学科教育分野）</td><td>2 3 4 5
6 7</td></tr>
<tr><td rowspan="3">数学 I
数学 II
数学 III
数学 A
数学 B</td><td>理学部

薬学部
工学部
先進科学プログラム</td><td>物理学科，化学科
生物学科，地球科学科

物理学関連分野
工学関連分野</td><td>5 7 8 9
10</td></tr>
<tr><td>医学部</td><td></td><td>5 7 9 11
12</td></tr>
<tr><td>理学部</td><td>数学・情報数理学科</td><td>5 7 9 10
11 12</td></tr>
</table>