

平成 28 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 4 題で、すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 4 枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は、表面の右下に「裏面に続く」と記入し、表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて、ていねいに描きなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して、論述式的答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は、下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

1

(必答問題) (配点 50)

自然数 n のすべての正の約数の和を表す関数を $f(n)$ 、正の約数の個数を表す関数を $g(n)$ とおく。ただし、1 および n も n の正の約数であり $f(1) = g(1) = 1$ とする。例えば、 $n = 12$ のとき、 n の正の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 なので

$$f(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28, \quad g(12) = 6$$

である。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(24)$, $g(24)$ の値を求めよ。
- (2) $g(n)$ の値が奇数となる n は、ある自然数の平方であることを証明せよ。

以下の問題では、 n は偶数とする。

- (3) m を正の整数とし、 $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$ とおく。このとき、 $2^m - 1$ が素数ならば $f(n) = 2n$ となることを証明せよ。
- (4) 平方数ではない偶数 n が $f(n) = 2n$ を満たしているとする。このとき、 n のすべての正の約数の逆数の和はある一定の数に等しいことを示し、その数を求めよ。

2

(必答問題)(配点 50)

r を $1 < r < 3$ を満たす実数, k を $|r - 2| < k < 1$ を満たす実数とする.

また, 次の関数 $f(x)$ を考える.

$$f(x) = rx(1 - x).$$

以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = x$ を満たす x を求めよ.

以下の問題では, (1)で求めた x のうちで正のものを x_r とする.

(2) 次の条件

$$|x - x_r| < a \text{ を満たすすべての } x \text{ について } |f'(x)| < k$$

が成り立つような正の実数 a が存在することを証明せよ.

(3) (2)の a に対して, 数列 $\{x_n\}$ を

$$|x_1 - x_r| < a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める.

(a) すべての自然数 n について $|x_n - x_r| < a$ であることを証明せよ.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_r$ を証明せよ.

3

(必答問題) (配点 50)

以下の問いに答えよ。なお、必要があれば以下の極限値の公式を用いてもよい。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

- (1) 方程式 $2^x = x^2 (x > 0)$ の実数解の個数を求めよ。
- (2) a を正の実数とし、 x についての方程式 $a^x = x^a (x > 0)$ を考える。
 - (a) 方程式 $a^x = x^a (x > 0)$ の実数解の個数を求めよ。
 - (b) 方程式 $a^x = x^a (x > 0)$ で a, x がともに正の整数となる a, x の組 (a, x) をすべて求めよ。ただし $a \neq x$ とする。

4

(必答問題)(配点 50)

2枚のコインがあり、1枚はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で表、裏が出る真のコイン、もう1枚は確率 $\frac{1}{3}$ で表、確率 $\frac{2}{3}$ で裏が出る偽のコインとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 真のコインを7回投げたとき3回連続して表が出る確率を求めよ。
- (2) 偽のコインを25回投げたとき表が出る回数が k 回である確率を $p(k)$ とする。 $p(k)$ が最大となる整数 k を求めよ。
- (3) 以下の実験を考える。

実験A：2枚のコインのうち1枚を無作為に選んだ後で、以下を繰り返す。

今持っているコインを投げて表ならそのコインを引き続き持ち、裏ならもう1つのコインと交換する。

n を自然数とする。実験Aにおいてコインを n 回投げたとき、 n 回目が表であるか、 n 回目に投げたコインが真のコインであるかのどちらかが生じる確率を n の式で表せ。