

平成 28 年度入学者選抜個別(第 2 次)学力検査問題

数 学

(医 学 科)

注 意 事 項

1. 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子は、全部で7ページあります。
3. 解答用紙は、問題冊子と別に印刷されているので、誤らないように注意しなさい。
4. 解答用紙には、必ず解答の過程と結果を記入しなさい。
5. 解答は、必ず解答用紙の点線より左に記入しなさい。
6. 下書は、問題冊子の余白を使用しなさい。ただし、切り離してはいけません。
7. 各解答用紙には、受験番号欄が2か所ずつあります。それぞれ記入を忘れないこと。
8. 解答用紙は、記入の有無にかかわらず、机上に置き、持ち帰ってはいけません。この冊子は持ち帰りなさい。
9. 落丁または印刷の不鮮明な箇所があれば申し出なさい。

1 自然数 n に対して、 n のすべての正の約数(1と n を含む)の和を $S(n)$ とおく。例えば、 $S(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) n が異なる素数 p と q によって $n = p^2q$ と表されるとき、 $S(n) = 2n$ を満たす n をすべて求めよ。

(2) a を自然数とする。 $n = 2^a - 1$ が $S(n) = n + 1$ を満たすとき、 a は素数であることを示せ。

(3) a を 2 以上の自然数とする。 $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ が $S(n) \leq 2n$ を満たすとき、 n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。

2 xyz 空間において連立不等式

$$|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$$

の表す領域を Q とし、正の実数 r に対して $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ の表す領域を S とする。また、 Q と S のいずれか一方のみに含まれる点全体がなす領域を R とし、 R の体積を $V(r)$ とする。さらに

$x \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_x

$y \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_y

$z \geq 1$ の表す領域と S の共通部分を S_z

とし、

$S_x \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_1

$S_x \cap S_y \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_2

$S_x \cap S_y \cap S_z \neq \emptyset$ を満たす r の最小値を r_3

とする。ただし、 \emptyset は空集合を表す。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $r = \frac{\sqrt{10}}{3}$ のとき、 R の xy 平面による断面を図示せよ。

(2) r_1, r_2, r_3 および $V(r_1), V(r_3)$ を求めよ。

(3) $r \geq r_1$ のとき、 S_x の体積を r を用いて表せ。

(4) $0 < r \leq r_2$ において、 $V(r)$ が最小となる r の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = \langle x \rangle - 2\langle x-1 \rangle + \langle x-2 \rangle$ を考える。ここで、実数 u に対して

$\langle u \rangle = \frac{u + |u|}{2}$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g(x) = \int_0^1 f(x-t) dt$ とおくと、 $g(x)$ の最大値を求めよ。

(3) (2) の $g(x)$ に対して、 $p(s) = \int_0^3 (x-s)^2 g(x) dx$ とおくと、 $p(s)$ の最小値を求めよ。