

数 学

< 監督者の指示があるまで開いてはいけない >

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

- (1) 1 から 4 までの番号をつけた 4 個の箱と、1 から 4 までの番号をつけた 4 枚のカードがある。最初は、1, 3 番の箱に赤玉が 1 個ずつ、2, 4 番の箱に白玉が 1 個ずつ入っている。4 枚のカードから同時に 2 枚を取り出し、取り出したカードの番号と同じ番号の 2 つの箱に入っている玉を入れかえた後、カードをもとに戻す。この試行を 2 回繰り返すとき、1, 3 番の箱に赤玉、2, 4 番の箱に白玉が入っている確率は (ア) であり、1, 2 番の箱に赤玉、3, 4 番の箱に白玉が入っている確率は (イ) である。
- (2) 複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta + \sqrt{3}(i \cos \theta - \sin \theta)$ において、 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ の範囲を動くとき、 $|\sqrt{2}z - 1 + i|$ の最大値は (ウ) である。ただし、 i は虚数単位とする。

2. xy 平面上において、半径 2 の円板が x 軸に接しながら正の方向にすべることなく回転するとき、円板上の定点 P が描く曲線 C_1 を考える。時刻 $t = 0$ における円板の中心 D の位置を点 $(0, 2)$ 、 P の位置を点 $(0, 1)$ とする。時刻 t において D が点 $(t, 2)$ の位置にあるように円板が回転していくとき、次の問いに答えよ。問い (1)(i) では にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ。

(1) (i) 時刻 t における P の座標 (x, y) を t を用いて表すと、 $(x, y) = (\text{工}, \text{オ})$ である。

(ii) x, y の t に関する増減をそれぞれ調べよ。

(2) 時刻 t に対応する点 $P(x, y)$ における C_1 の法線 l が x 軸と交わる点を M とし、 M が線分 PQ の中点となるような l 上の点を Q とおく。 Q の座標を t を用いて表せ。ただし、 $t = 0$ のときは Q を点 $(0, -1)$ とする。

(3) 点 Q が描く曲線を C_2 とする。2 曲線 C_1, C_2 と y 軸、および $t = 3\pi$ のときの (2) における法線 l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

3. a を 3 以上の奇数の定数とする。方程式 $ax - 2y = 1$ をみたす自然数の組 (x, y) について、次の問いに答えよ。

(1) 組 (x, y) は無数に存在することを示せ。

(2) 組 (x, y) の列 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$ が、条件「 $n \geq 2$ について x_n は、 x_1, x_2, \dots, x_{n-1} のどの項とも異なる」をみたすとする。このとき、極限值

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \dots + \frac{y_n}{x_n} \right)$ を a を用いて表せ。必要ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を利用してよい。

4. 正四面体 ABCD があり, 三角形 ABD 上に $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ をみたす点 P をとる。三角形 ACD の重心を G, 直線 GP と平面 ABC の交点を Q とする。線分 AB 上の点 R を, 三角形 PQR が PQ を斜辺とする直角三角形となるようにとるとき, 線分 AR, AB の長さの比の値 $\frac{AR}{AB}$ を求めよ。



