

数 学 (全1の1)

次の に適切な解を入れよ。複数の解がある場合は、コンマで区切ってすべての解を記入すること。

1. 座標平面上の2直線 $mx - y + 1 = 0$, $x + my - m - 2 = 0$ の交点を P とする。ここで, m は実数とする。

(i) m の値が変化するとき, 点 P が描く軌跡の方程式は ① である。ただし, 点 $(0, 1)$ を含まない。

(ii) m の値が $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq m \leq 1$ のとき, 点 P が描く曲線の長さは ② である。

2. 正八面体について考える。(iii)~(iv)において, 回転すると重なる並び方は同じとする。

(i) 頂点の数は ③ 個ある。

(ii) 頂点に 1, 2, ... と順に番号を付けていくとき, 番号の付け方は ④ 通りある。

(iii) 2つの面を赤に, 残りの6つの面を白に塗るとき, 塗り方は ⑤ 通りある。

(iv) 3つの面を赤に, 残りの5つの面を白に塗るとき, 塗り方は ⑥ 通りある。

3. 次の計算をしなさい。対数は自然対数とする。

$$\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx = \text{⑦}, \int_1^{\sqrt{3}} 2x \log(1+x^2) dx = \text{⑧}$$

4. 座標平面上で, 関数 $f(x) = \sqrt{6-x}$ で表される曲線 $C: y = f(x)$ を考える。 $4 \leq t \leq 5$ を満たす実数 t に対して, 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ と $(t, 0)$, $(2, 0)$ および $(2, f(t))$ の4つの点を頂点とする四角形の面積を $S(t)$ とする。

(i) $S(t)$ を t を用いて表すと ⑨ となる。

(ii) $S(t)$ は $t = \text{⑩}$ のとき最大値 ⑪ をとり, $t = \text{⑫}$ のとき最小値 ⑬ をとる。

(iii) 区間 $[4, 5]$ を n 等分してその端点と分点を小さい順に $t_0 = 4, t_1, t_2, \dots, t_n = 5$ とする。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S(t_k)$ の値を求めると ⑭ となる。ただし, n は正の整数とする。

5. 数列 $\{a_n\}$ が $3(a_{n+1})^2 = (a_n)^3$ の関係を満たしているとする。ただし, a_n は正の実数で, n は正の整数とする。

(i) $\log a_n$ を n と a_1 を用いて表すと ⑮ となる。

(ii) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような a_1 の値の範囲は ⑯ である。

6. 平面上に三角形 $\triangle ABC$ と点 P があり, $9\vec{PA} + 4\vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ を満たしている。三角形 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とするとき, 面積比を求めると $S_1 : S_2 : S_3 = \text{⑰}$ となる。