一般入試　数学

I

(1)　2^n を 9 で割った余りが 1 となる最小の正の整数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である．また，2^{100} を 9 で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　x^{10} を $(x+1)^3$ で割った余りは $\boxed{\text{ウエ}}\,x^2 + \boxed{\text{オカ}}\,x + \boxed{\text{キク}}$ である．

(3)　分子が奇数，分母が 2 の累乗である分数の項からなる，第 n 群に 2^{n-1} 個の項を含む次のような群数列を考える．

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{第1群}} \;\Big|\; \underbrace{\frac{3}{4},\ \frac{5}{4}}_{\text{第2群}} \;\Big|\; \underbrace{\frac{7}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{11}{8},\ \frac{13}{8}}_{\text{第3群}} \;\Big|\; \frac{15}{16},\ \cdots$$

最初から数えて 100 番目の項は，第 $\boxed{\text{ケ}}$ 群の第 $\boxed{\text{コサ}}$ 項であり，その値は $\dfrac{\boxed{\text{シスセ}}}{\boxed{\text{ソタチ}}}$ である．この群に含まれる項の総和は $\boxed{\text{ツテ}}$ である．

自然数 n に対し，第 n 群の初項を a_n，末項を b_n，第 n 群に含まれる項の総和を S_n とすると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\text{ト}}\,,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \boxed{\text{ナ}}\,,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{2^n} = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

が成り立つ．

II　kは実数の定数，xは$-1 \leqq x \leqq 2$を満たす実数とし，この区間を定義域とする関数

$$f(x) = 2^{1+2x} + 2^{1-2x} - 17k(2^x + 2^{-x}) + 40k - 7, \quad g(x) = 2^x + 2^{-x}$$

について，以下の問いに答えよ．

(a)　$f(x) = h(g(x))$が成り立つように，2次関数$h(t)$を定義すると，

$$h(t) = \boxed{\text{ア}}\, t^2 - \boxed{\text{イウ}}\, kt + 40k - \boxed{\text{エオ}}$$

となる．$y = h(t)$が表すグラフは，定数kの値に依らず定点Pを通る．点Pのy座標は

$\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$である．

(b)　$y = g(x)$と$y = t$が表すグラフの共有点の個数は

- $a < t \leqq b$のときは2個
- $t = a$または$b < t \leqq c$のときは1個
- $t < a$または$c < t$のときは$\boxed{\text{サ}}$個

である．ただし，$a = \boxed{\text{シ}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$c = \dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$である．

(c)　方程式$f(x) = 0$が異なる3つの実数解を持つように，定数kの範囲を求めると，

$$k = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \text{ または } \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq k \leqq \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

となる．

Ⅲ $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものをそれぞれ 1 つずつ選べ．

i は虚数単位，$\bar{z}$ は z と共役な複素数を表すものとして，原点を O とする複素数平面上の図形について，以下の問いに答えよ．

(1) 次の方程式を満たす点 z の全体が表す図形は，

(a) $|z+1| = |z-1-2i|$ が $\boxed{\text{ア}}$，

(b) $|z| = 2|z-2|$ が $\boxed{\text{イ}}$，

(c) $|z| + \dfrac{1}{2}(z+\bar{z}) = 1$ が $\boxed{\text{ウ}}$

である．

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

① 直　線　　② 円　　③ 楕　円　　④ 双曲線　　⑤ 放物線

(2) k を正の実数とする．方程式 $|z| = \sqrt{k}\,|z-2|$ を満たす点 z の全体が表す図形と，問題(1)の(a)の方程式が表す図形が接するとき，定数 k は

$$k = \boxed{\text{エ}} \pm \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

を満たす．$k = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，2 つの図形の接点を表す複素数 α は

$$\alpha = \boxed{\text{キ}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}i$$

である．また，$k = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のときの 2 つの図形の接点を表す複素数を β とすると，

$$\alpha\bar{\beta} = \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,i$$

となる．

(3)　正の実数 c と $\tan\theta = 2$，$0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対し，複素数 $w = c(\cos\theta + i\sin\theta)$ を考える．$\gamma_0 = 2$ で表される複素数平面上の点を A，$\gamma_1 = \gamma_0 w$ で表される点を B とする．直線 OB と直線 AB が直交するとき，

$$c = \frac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり，線分 AB の長さは

$$\mathrm{AB} = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$$

となる．このとき，自然数 n に対して，$\gamma_n = \gamma_0 w^n$ とすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n - \gamma_{n-1}| = \boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}$$

となる．

Ⅳ $\boxed{\text{ツ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを１つ選べ．

２つの定数 a，b を係数に持つ３次関数 $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + ax + b$ に対し，$y = f(x)$ のグラフを C とする．

(a) 曲線 C の変曲点とは異なる点 $\mathrm{T}(t,\ f(t))$ における C の接線 ℓ の方程式を $y = g(x)$ とする．この接線と曲線 C の共有点のうち T ではない交点を $\mathrm{S}(s,\ f(s))$ とすると，

$$f(x) - g(x) = \boxed{\text{ア}}\,(x-s)(x-t)^{\boxed{\text{イ}}}$$

と表すことができる．この式の x^2 の係数は $\boxed{\text{ウ}}$ なので，

$$\boxed{\text{エ}}\,t + s = \frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

が成り立つ．

(b) 曲線 C の変曲点から x 軸におろした垂線と接線 ℓ との交点を H とする．点 H の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ であり，点 H は線分 ST を $\boxed{\text{サ}}$ ：１に内分する．

(c) 接点 T の x 座標が $t = -1$ のとき，交点 S の x 座標は $s = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，曲線 C と接線 ℓ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ となる．

また，$\boxed{\text{ツ}}$ により，接線 ℓ の傾きが $f'(u)$ と等しくなるような実数 u が $t < u < s$（あるいは $s < u < t$）の範囲に存在する．$t = -1$ のとき，これを満たす実数 u は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である．

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

① 正弦定理	② 加法定理	③ ド・モルガンの法則
④ はさみうちの原理	⑤ 平均値の定理	⑥ メネラウスの定理
⑦ 中間値の定理	⑧ ド・モアブルの定理	