

平成 28 年度医学科入学試験問題

数 学

〔注意事項〕

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。
- 3 この問題冊子の本文は、4 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 n は 2 以上の整数とする。変量 x についてのデータの値を x_k ($1 \leq k \leq n$) とし、変量 y についてのデータの値を y_k ($1 \leq k \leq n$) とする。変量 z はデータの値が $x_k y_k$ ($1 \leq k \leq n$) である変量を表す。

(1) 変量 x と y の n 個の値の組を (x_k, y_k) ($1 \leq k \leq n$) としたときの x と y の共分散 s_{xy} (偏差の積の平均) について

$$s_{xy} = \bar{z} - \bar{x}\bar{y}$$

が成り立つことを証明せよ。ここで \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} はそれぞれ変量 x , y , z についてのデータの値の平均値を表す。

0 以上の整数 a と 1 以上の整数 b に対し、 a を b で割った余りを $R_b(a)$ と表す。 l , m は 2 以上 n 以下の整数とする。変量 x と y の n 個の値の組を

$$(x_k, y_k) = (R_l(k-1) + 1, R_m(k-1) + 1) \quad (1 \leq k \leq n)$$

としたときの x と y の相関係数を r とする。

(2) l は n の約数とし、 $m = n$ であるとき、 r を求めよ。

(3) $n = l(l+1)$ とし、 $m = l+1$ であるとき、 r を求めよ。

2 z は 0 でない複素数とし, $a = \frac{3}{4}(z + \bar{z})$, $\beta = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right)$ とおく。ただし \bar{z} は z に共役な複素数である。

- (1) $\beta = 0$ となる z はどのような複素数か述べよ。
- (2) a と β がともに自然数となる z をすべて求めよ。
- (3) 複素数平面上において, (2) で求めた z に対応する点のすべてを周または内部に含む円を考え, そのような円のうち最小の面積をもつものを C とする。 C の中心を表す複素数と C の半径を求めよ。

3 a, b を正の実数とし, 媒介変数表示

$$x = a \cos 2t, y = b \sin 3t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される xy 平面上の曲線を C とする。

- (1) 実数 θ に対して, $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ であることを証明せよ。
- (2) y を x を用いて表せ。
- (3) x の関数 y の増減を調べ, 曲線 C の概形をかけ。
- (4) 曲線 C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

4 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。すべての整数 l, m に対し、直線 $x = l$ と直線 $y = m$ を引き、 xy 平面を格子点を頂点とする一辺の長さが 1 の正方形の集まりに分割する。その一つ一つの正方形 (格子点を頂点とする 1 辺の長さが 1 の正方形) の内部を区画と呼ぶ。正の実数 k に対して原点を通る直線 $L_k: y = kx$ をとり、 L_k が通る区画について考える。ここで L_k が区画を通るとは、直線 L_k と区画が共有点をもつことをいう。自然数 n に対して、不等式 $n - 1 < x < n$ で表される xy 平面上の領域を D_n とする。 D_n に含まれ、直線 L_k が通る区画の個数を a_n とおく。

以下 k は無理数とする。

- (1) 直線 L_k は原点以外に格子点を通らないことを証明せよ。
- (2) $k < a_n < k + 2$ であることを証明せよ。
- (3) N を自然数とするとき、極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n$ を求めよ。
- (4) $0 < k < 1$ とする。自然数 N に対し、 N 以下の自然数 n で $a_n \geq k + 1$ となる n の個数を A_N とおく。極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N}{N}$ を求めよ。