

平成 28 年度入学試験問題

数 学 (理, 医, 歯, 工学部)

注 意 事 項

- 1 この問題冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはならない。
- 2 問題冊子は、全部で5ページある。(落丁, 乱丁, 印刷不鮮明の箇所などがあつた場合は申し出ること。) 別に解答用紙がある。
- 3 解答はすべて、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。
- 4 受験番号は、各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。
- 5 受験学部, 学科により解答すべき問題(○印), 解答用紙の枚数及び解答時間は、下表のとおりである。

受験学部(学科)	解答すべき問題(○印)					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部(数学科, 物理学科)及び工学部	○	○	○	○	○	5枚	120分
理学部(化学科, 生物学科, 自然環境科学科)及び医学部(保健学科)	○	○	○	○		4枚	90分
医学部(医学科)及び歯学部		○	○	○	○	4枚	90分

- 6 下書きは、問題冊子の余白を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

1 整式 $P(x) = x^4 + x^3 + x - 1$ について、次の問いに答えよ。

(1) i を虚数単位とするとき、 $P(i)$, $P(-i)$ の値を求めよ。

(2) 方程式 $P(x) = 0$ の実数解を求めよ。

(3) $Q(x)$ を 3 次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1) = P(1), \quad Q(-1) = P(-1),$$

$$Q(2) = P(2), \quad Q(-2) = P(-2)$$

をすべて満たす $Q(x)$ を求めよ。

2 $\triangle OAB$ において、 $OA = 5$, $OB = 6$, $AB = 7$ とする。 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t : (1-t)$ に内分する点を P , 辺 OB を $1 : t$ に外分する点を Q , 辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) \overrightarrow{OR} を t , \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

(3) \overrightarrow{OS} を t , \vec{b} を用いて表せ。

(4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。

3 3 が書かれたカードが 10 枚，5 が書かれたカードが 10 枚，10 が書かれたカードが 10 枚，全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3，5，10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

- (1) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。
- (2) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。
- (3) 操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

4 a を $0 < a < 1$ を満たす実数として x の関数 $f(x) = ax - \log(1 + e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし必要があれば

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$$

が成り立つことを用いてよい。

- (1) $M(a)$ を a を用いて表せ。
- (2) a の関数 $y = M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。
- (3) a の関数 $y = M(a)$ のグラフをかけ。

5 一般項が $a_n = \frac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。