

平成28年度入学試験問題(前期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (前 期)

[1]

(1) 変数 $u \geq 1$, $v \geq 1$ が関係式 $u + v = 3$ をみたすとき, 積 uv の値の範囲を示せ。

変数 $x \geq 0$, $y \geq 0$ が関係式 $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3$ をみたすとする。 $u = \sqrt{1+x^2}$, $v = \sqrt{1+y^2}$, $t = uv$ とおく。

(2) xy を t の関数として表せ。

(3) $(x+y)^2$ を t の関数として表せ。

(4) $x+y$ の値の範囲を示せ。

[2] 自然数 a, b に対して, その最大公約数を $G(a, b)$ とする。

(1) $a > b$ のとき, $G(a, b) = G(a-b, b)$ を示せ。

自然数 n に対して $(1+\sqrt{3})^n = p_n + q_n\sqrt{3}$ (p_n, q_n は自然数) とおく。

(2) $G(p_{n+2}, q_{n+2})$ と $G(p_n, q_n)$ の関係式を導け。

(3) $G(p_n, q_n)$ の値を求めよ。

[3] e を自然対数の底として, $f(x) = e^x - 2x^2$ とおく。 $2 < e < 2\sqrt{2}$ および $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$ は既知とする。

(1) $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とすると, 方程式 $f'(x) = 0$ は 2 つの解を持つことを示せ。

(2) 方程式 $f'(x) = 0$ の 2 つの解を a, b ($a < b$) とするとき, $0 < a < 2 < b$ を示せ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ は 3 つの解を持つことを示せ。

[4] 半径が等しい 2 つの円と一辺の長さ 2 の正三角形 ABC がある。2 つの円は互いに外接している。さらに一方の円は辺 AB と BC に接し, 他方の円は CA と BC に接している。

(1) これらの円の半径を求めよ。

(2) 2 つの円の周および内部を, 三角形 ABC の A を通る中線の周りに回転させてできる立体の体積を求めよ。

[5] 1, 2, 3, 4, 5 と記されたカードがそれぞれ 2 枚ずつ, 合計 10 枚のカードがある。以下のゲームを行い, 当たり, 外れを決める。

10 枚のカードをよく混ぜて, 2 枚引く。引いたカードの 2 数の合計を A とおく。 $A \geq 7$ のときは外れ, $A = 6$ のときは当たりとする。 $A \leq 5$ のときは, 残りの 8 枚のカードの中から更に 1 枚を引き, 3 枚のカードの合計を B とする。 $B \neq 6$ ならば外れ, $B = 6$ ならば当たりとする。

(1) $A = 6$ である確率を求めよ。

(2) このゲームで当たりとなる確率を求めよ。