

平成28年度

# 数 学 問 題

(理学部・工学部・医学部医学科)

## 注 意 事 項

- 1 問題冊子は、監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと。
- 2 問題冊子は全部で8ページである。脱落のあった場合には申し出ること。なお、解答用紙は上部で接着してあるので、はがさずに解答すること。
- 3 解答用紙は全部で4枚である。各ページ所定欄に、それぞれ氏名、受験学部、受験番号（最後のページは、左右2か所）を忘れずに記入すること。
- 4 解答は、すべて解答用紙の所定欄に記入すること。
- 5 解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが、採点はしない。
- 6 机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと。
- 7 問題冊子は持ち帰ること。

## 第 1 問 (50点)

$r$  は  $0 < r < 1$  を満たす実数とする. 次の問いに答えよ. ただし,  $0^r = 0$  と定める.

問 1  $a \geq 0$  のとき,  $x \geq 0$  について, 不等式  $(a+x)^r \leq a^r + x^r$  を示せ.

問 2  $a_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) のとき, 不等式  $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^r \leq \sum_{k=1}^n a_k^r$  を示せ.

## 第 2 問 (50点)

次の問いに答えよ.

問 1 0 以上の整数  $n$  に対し,  $C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$  とおくとき,  $C_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} C_n$  を示せ.  
ただし,  $\cos^0 x = 1$  と定める.

問 2 座標空間内で, 連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad z + 2x^2 - x^4 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

の表す領域の体積を求めよ.

### 第 3 問 (50点)

$0 < r < 1$  を満たす実数  $r$  に対して, 第 1 象限内の曲線  $C: x^r + y^r = 1$  を考える. 曲線  $C$  上の点  $P(p, q)$  をとり,  $\ell$  を点  $P$  における  $C$  の接線とし,  $\ell$  が  $x$  軸および  $y$  軸と交わる点をそれぞれ  $A, B$  とする. 次の問いに答えよ.

問 1 点  $A$  と点  $B$  の座標を  $p, q, r$  を用いて表せ.

問 2 点  $P$  を曲線  $C$  上のどこにとっても線分  $AB$  の長さが同じになるような  $r$  の値を求めよ.

#### 第 4 問 (50点)

$n$  を正の整数とし,  $m$  を 0 以上 10 以下の整数とする. 袋 1 から袋  $n$  まで, 外見では区別  
のつかない袋が  $n$  袋ある.  $k = 1, 2, \dots, n$  について, 袋  $k$  の中には, 赤球が  $k$  個, 白球が  
 $n - k$  個入っているものとする. 袋を 1 つ選んだ後, その選んだ袋について次の操作を 10 回  
繰り返して行うことにする.

(操作) 袋から球を 1 つ取り出し, 色を確認してその袋に戻す.

赤球をちょうど  $m$  回取り出す確率を  $P_{m,n}$  とするとき, 次の問いに答えよ.

問 1  $P_{m,n}$  を求めよ.

問 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{10,n}$  を求めよ.

問 3  $m = 0, 1, 2, \dots, 9$  について,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{m+1,n}$  を示せ.