

# 数 学 問 題 紙

平成 28 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

## 答 案 作 成 上 の 注 意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

# 問題訂正

## 「数学」

2 ページ 

1
---

(2) 4行目および5行目

(誤)

- (i) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = \log_2 a_n$  とするとき,  $\{b_n\}$  の一般項を  $n$  を用いて表せ.
- (ii) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を  $n$  を用いて表せ.

(正)

- (i) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = \log_2 a_n$  とするとき,  $\{b_n\}$  の一般項を  $a$  と  $n$  を用いて表せ.
- (ii) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を  $a$  と  $n$  を用いて表せ.

1 次の問に答えよ.

(1) 空間上の3点を  $A(0, 1, 3)$ ,  $B(-1, 3, 2)$ ,  $C(1, 2, -1)$  とする.

この3点を通る平面上に  $D(a, b, -1)$  があるとき,  $a$  と  $b$  の関係式を求めよ.

(2) 数列  $\{a_n\}$  は

$$a_1 = a > 0, \quad a_{n+1} = 16a_n^3 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

をみたすものとする.

(i) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = \log_2 a_n$  とするとき,  $\{b_n\}$  の一般項を  $n$  を用いて表せ.

(ii) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を  $n$  を用いて表せ.

(iii) すべての  $n$  について  $a_n = a$  をみたすような  $a$  の値を求めよ.

(3) 複素数平面において, 等式  $2|z - 4| = 3|z - 3i|$  をみたす点  $z$  の全体はどのような図形を表すか. ただし  $i$  は虚数単位とする.

2 原点  $O$  の座標平面上で点  $A(a, 0)$  が与えられている。ただし  $0 < a < 1$  とする。また、点  $P$  は曲線  $x^2 + y^2 = 1$  ( $y > 0$ ) 上を以下の条件をみたしながら動くものとする。

(条件) 三角形  $OAP$  の外心  $Q$  は  $x^2 + y^2 \leq 1$  をみたす領域内にある。

点  $Q$  の  $y$  座標を  $q$  とする。このとき、以下の各問に答えよ。

- (1)  $q$  の取りうる範囲を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $q$  が最大となるときの点  $P$  の座標を  $a$  を用いて表せ。
- (3) 点  $P$  が条件をみたしながら動くとき、三角形  $OAP$  が通過する領域の面積を  $a$  を用いて表せ。

3 2種類の文字「A」, 「B」を1つずつ左から右に書いていく. 書かれる文字がAかBかは確率 $\frac{1}{2}$ で決まるものとする. しかし, 次の2つのルールにより文字が消去されることがある:

1. 右端のAの右隣にBが書かれる場合, そのBは確率 $\frac{2}{3}$ で消去される
2. 右端のBの左側にAが1つ以上存在する場合, それらのうちでもっとも右にあるAをⒶと呼ぶ. この状況で, 右端のBの右隣にAが書かれる場合, 確率 $\frac{2}{3}$ でそのAとⒶより右側のすべての文字が消去される(ただしⒶは消去されない).

上記2つのルールにあてはまらない場合は, 消去される文字はないものとする.  
 $n$ 文字を書いたときに, 実際に残っている文字数を $a_n$ とする.

例えば, 3文字をA, B, Aの順に書いた場合の結果は「ABA」, 「AA」, 「A」のいずれかとなる.

- (1)  $a_3 = 2$ となる確率を求めよ.
- (2)  $a_4 = 1$ となる確率を求めよ.
- (3)  $a_n = n$ となる確率を $n$ を用いて表せ.

4

関数  $f(x) = x + 2 \cos x$  を  $0 \leq x \leq 2\pi$  の範囲で考える.

- (1) 関数  $y = f(x)$  の極値と変曲点を求め, グラフの概形を描け.
- (2) 関数  $y = f(x)$  の二つの変曲点を通る直線を  $l$  とする. 曲線  $y = f(x)$  と直線  $l$  とで囲まれる図形を  $x$  軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.