次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で，自然数の根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となる形で書きなさい．

1

(1) 方程式 $\log_3 x+\log_3(3x-8)=1$ の解は $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 複素数 z が $|z|=3$ かつ $|z+4|=4$ を満たすとする．このとき，$z\overline{z}=$ $\boxed{\text{イ}}$，$z+\overline{z}=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

(3) $x>0$ とする．このとき，$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$ は $x=$ $\boxed{\text{エ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{オ}}$ をとる．

(4) $(x^2-x+1)^{20}$ を展開したとき，x の係数は $\boxed{\text{カ}}$，x^2 の係数は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(5) 数列 $\{a_n\}$ がすべての自然数 n に対して $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^3$ を満たすとき，$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}=$ $\boxed{\text{ク}}$ となる．

2

(1) $\dfrac{1}{1+\tan^2 t}$ を $\cos t$ を用いて表すと $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ について，$x=\tan t$ とおいて置換積分法を用いると $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1 \frac{(x)'}{1+x^2}dx$ と考え，部分積分法を用いると $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

これより $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx=$ $\boxed{\text{エ}}$ が得られる．

(4) 等式 $x(x+1)^2=(ax+b)(x^2+1)+cx+d$ が x についての恒等式となるとき，定数 a，b，c，d の値は $a=$ $\boxed{\text{オ}}$，$b=$ $\boxed{\text{カ}}$，$c=$ $\boxed{\text{キ}}$，$d=$ $\boxed{\text{ク}}$ である．よって，

$$\int_0^1 \frac{x(1+x)^2}{(1+x^2)^2}dx=\int_0^1\left\{\frac{ax+b}{1+x^2}+\frac{cx+d}{(1+x^2)^2}\right\}dx=\boxed{\text{ケ}}$$

である．

3 円周上に7つの点 A_0, A_1, A_2, …, A_6 がこの順番で時計回りに並んでいる．さいころを投げて出た目によって動点Pを動かすゲームをし，終了条件が満たされればゲームを終了する．ゲームが終了するまでにさいころを投げた回数をゲーム終了までの回数とする．最初，動点Pは A_0 にあり，さいころを投げて出た目の数だけ時計回りに隣の点に移動する．例えば，さいころの目が5，3，6と出たらPは $A_0 \to A_5 \to A_1 \to A_0$ と移動する．

(1) 終了条件を動点Pが再び A_0 で止まるか，またはすでに止まったことがある点に再び止まった場合とする．ゲーム終了までの回数がちょうど2回である確率は $\boxed{\text{ア}}$，ちょうど3回である確率は $\boxed{\text{イ}}$，ちょうど6回である確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) 終了条件を動点Pが再び A_0 で止まった場合とする．

(i) ゲーム終了までの回数がちょうど3回である確率は $\boxed{\text{エ}}$ であり，3回以下である確率は $\boxed{\text{オ}}$，ゲーム終了までの回数がちょうど n 回である確率は $\boxed{\text{カ}}$ である．ただし $n \geqq 2$ とする．

(ii) ゲーム終了までの回数が4回であり，動点Pが円周をちょうど2周回って終了するような移動の仕方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りである．