数　学

注意事項

1. 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

2. 試験開始の指示があったら，すぐに「問題」と「答案用紙」および「計算用紙」の種類と枚数が以下のとおりであることを確認し，**受験番号を「答案用紙」の6枚すべてに記入してください。**

   - 問題　1枚
   - 答案用紙　（数学その1）～（数学その6）　各1枚　計6枚
   - 計算用紙　（その1）～（その3）　各1枚　計3枚

   （この「注意事項」は「計算用紙（その3）」のうら面に印刷されています。）

3. 「問題」1枚と「答案用紙」6枚および「計算用紙」3枚の種類や枚数が異なる場合や印刷が不鮮明な場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

4. 解答は各答案用紙の指定された場所に書いてください。（数学その1）および（数学その2）では，おもて面に解答し，（数学その3）～（数学その6）では，うら面を使用する場合はその旨を記してください。

5. 「問題」1枚および「計算用紙」3枚は草案として使用してもかまいませんが，採点対象とはしません。必ず持ち帰ってください。

6. 試験終了後，**「答案用紙」6枚はすべて回収します。**上から（数学その1），（数学その2），…，（数学その6）の順に，おもて面を上にして，ひろげた状態で用紙の上下をそろえて6枚重ねてください。

7. すべての確認作業が終了するまで着席していてください。

平成28年度入学者選抜試験問題（数学）

1 次の問題文の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{カ}}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) 6 個の値 $5, 8, 4, 2, a, b$ からなるデータの平均値と中央値がともに 6 であるとき，a, b の値を求めると $a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$a < b$ とする。

(2) 関数 $f(x) = |x| + |x+1| + |x+2| + |x+3|$ は，最小値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる。

(3) 座標空間において，原点 O を中心とする球面 S と，すべての頂点が S 上にある正四面体 T を考える。$\mathrm{A}(\sqrt{2}, 0, 1)$，$\mathrm{B}(0, -\sqrt{2}, -1)$ が T の頂点であるとき，S の半径は $\boxed{\text{エ}}$ であり，T の残りの頂点の座標をすべて求めると $\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) 自然数 $p_1, p_2, \cdots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_n$ が $p_k > q_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ を満たすとする。$0 \leqq x \leqq 1$ に対し，関数

$$f(x) = \{x^{q_1}(1-x)^{p_1 - q_1}\}\{x^{q_2}(1-x)^{p_2 - q_2}\} \cdots \{x^{q_n}(1-x)^{p_n - q_n}\}$$

は，$x = \boxed{\text{カ}}$ のとき最大となる。

2 次の問題文の空欄 $\boxed{\text{キ}}$ から $\boxed{\text{セ}}$ にあてはまるものを解答欄に記入せよ。

(1) a, b を 0 でない実数とし，$f(x) = e^{ax}\cos bx$ に対して $f'(x) = e^{ax}\left(-\frac{1}{2}\cos bx - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin bx\right)$ が成り立つとする。このとき，a, b の値は $a = \boxed{\text{キ}}$，$b = \boxed{\text{ク}}$ であり，$f(x)$ の第 8 次導関数は $f^{(8)}(x) = e^{ax}\cos\left(bx + \boxed{\text{ケ}}\right)$ となる。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ は $0 \leqq \boxed{\text{ケ}} < 2\pi$ を満たす実数であり，解答に a, b の文字を使ってはならない。

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ とする。$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \boxed{\text{コ}}$ となる。また，任意の実数 a に対して $\int_0^a f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$ が成立する 0 でない b の値は $b = \boxed{\text{サ}}$ である。曲線 $y = f(x)$ の $y \geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(3) 0 でない複素数 z が $\sum_{n=0}^{6} z^n = 0$ を満たすとする。このとき，$\left(\sum_{n=0}^{6} z^{n^2}\right)^2$ の値は $\boxed{\text{ス}}$ である。また，$2 + z + z^2 + z^4$ を解にもち，整数を係数とする n 次方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ ($n \geqq 1$，$a_1, \cdots, a_n$ は整数）で，n が最小となる方程式は $\boxed{\text{セ}} = 0$ である。

3 n を自然数とする。A，B の 2 人が，以下の設定でどちらかが優勝するまでゲームを繰り返す。1 回のゲームでは確率 $p = \frac{1}{3}$ で A が勝ち，確率 $1 - p = \frac{2}{3}$ で B が勝つ。A が n 勝する前に B が 5 勝したら B の優勝とし，B が 5 勝する前に A が n 勝したら A の優勝とする。4 以下の自然数 n の中で，A が優勝する確率が $\frac{1}{2}$ に最も近くなる n を求めよ。

4 2 つの自然数 x, y の最小公倍数を $[x, y]$，最大公約数を (x, y) と書く。また，3 つの自然数 x, y, z の最大公約数を (x, y, z) と書く。このとき，任意の自然数 a, b, c に対して $([a, b], c)\,(a, b, c) = (a, c)\,(b, c)$ が成り立つことを示せ。

5 xy 平面において，1 でない正の実数 r に対して $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2 - 1} = 1$ で表される曲線を C_r とする。$0 < \beta < 1 < \alpha$ を満たす定数 α, β に対し，C_α と C_β の交点をすべて求めよ。また，交点 P を任意に 1 つ選んだとき，P での C_α と C_β の接線は互いに直交することを示せ。

6 多項式 $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$ および $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \cdots$ を

$$P_0(x) = x, \quad Q_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad Q_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。$x \geqq 0$，$m = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，以下の不等式を示せ。

$$P_{2m}(x) \geqq \sin x \geqq P_{2m+1}(x), \quad Q_{2m}(x) \geqq \cos x \geqq Q_{2m+1}(x)$$