

平成29年度入学者選抜学力検査問題

数 学

注 意 事 項

1. この冊子は、監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので、この冊子を裏返して必ず読み、志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし、この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら、解答用紙の上部の所定欄には受験番号、座席番号を、また、下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は、問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は、解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも、特に指示がないかぎり、必ず解答の過程を書き、結論を明示すること。小問に分けられているときには、小問の結論を明示すること。
7. この冊子は12頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は、この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には、解答用紙は記入の有無にかかわらず机の上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってください。

1 定数 a は $0 \leq a \leq 1$ をみたすとする。座標平面上に 4 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(a, 0)$ をとる。点 P は線分 OA 上, 点 Q は線分 OB 上にあり, $PQ \perp OA$ をみたすものとする。点 P が点 O と点 C 以外を動くときの $\triangle PQC$ の面積の最大値を S とする。

(1) $a = 1$ のときの S を求めよ。

(2) S を a を用いて表せ。

2 座標平面上に3点 $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ がある。線分 OB 上に2点 P, Q を $\angle PAQ = 90^\circ$ となるようにとる。ただし、点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。 $\angle APQ = \theta$ とし、 $\triangle APQ$ の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値、およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍となるとき、点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

3 a, b を正の整数とするととき, 次を証明せよ。

(1) $a^3 - a$ は 3 の倍数である。

(2) $a - b$ が 3 の倍数ならば, $a^3 - b^3$ は 9 の倍数である。

(3) $a^3 - b^3$ は, 3 の倍数ならば 9 の倍数である。

4 1個のさいころを3回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- 1回目は、出た目が得点になる。
- 2回目は、出た目が1回目と同じならば得点は0、異なれば出た目が得点になる。
- 3回目は、出た目が1回目または2回目と同じならば得点は0、どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3回の得点の和を総得点とし、総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値、最小値と、それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

5 n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$ とし, $k = 2\cos\frac{2\pi}{n}$ とおく。そして, 線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) \vec{a} および \vec{d} を, \vec{b} , \vec{c} , k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し, $\frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\frac{\Delta PA_2A_3}{\Delta A_1A_2A_4} > \frac{1}{12}$ を示せ。

6 座標平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数を n とする。

(1) $n = 3$ をみたすような点 (a, b) の範囲を図示せよ。

(2) $-3a < b$ かつ $n \leq 2$ をみたすように点 (a, b) が動くとき、 $b - 3a$ の最小値を求めよ。

7 1個のさいころを3回投げて、以下のルールで各回の得点を決める。

- 1回目は、出た目が得点になる。
- 2回目は、出た目が1回目と同じならば得点は0、異なれば出た目が得点になる。
- 3回目は、出た目が1回目または2回目と同じならば得点は0、どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3回の得点の和を総得点とし、総得点が n となる確率を p_n とする。

- (1) 総得点 n の最大値、最小値と、それらの n に対する p_n を求めよ。
- (2) p_6 を求めよ。
- (3) p_n が最大となるような n と、そのときの p_n を求めよ。

8 t を 0 以上の実数とし、 O を原点とする座標平面上の 2 点 $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ で 3 つの条件

$$PQ = 2, \quad p < q, \quad p + q = \sqrt{t}$$

をみたすものを考える。 $\triangle OPQ$ の面積を S とする。ただし、点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S = 0$ とする。

- (1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。
- (2) S を t を用いて表せ。
- (3) $S = 1$ となるような t の個数を求めよ。

9 複素数平面上の点 z ($z \neq -\frac{i}{2}$) に対して, $w = \frac{z+2i}{2z+i}$ とする。

- (1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 w の描く図形を求めよ。
- (2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

10 曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする。 C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t ($t \geq 0$) である点を共有し、その点で共通の接線を持つとする。 C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

- (1) C の方程式を求めよ。
- (2) $S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ1つ存在することを示せ。

11 数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) a_5 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し、その和を求めよ。

12 曲線 C は曲線 $y = -e^x$ を平行移動したものとする。 C と曲線 $y = e^{-x}$ は x 座標が t ($t \geq 0$) である点を共有し、その点で共通の接線を持つとする。 C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ1つ存在することを示せ。

(4) $S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると、 $\alpha > \log \frac{12}{5}$ であり、 $S(\alpha) < \frac{95}{144}$ となることを示せ。必要ならば $\log \frac{24}{5} < 1.57$ を用いてもよい。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により、以下に示す番号の問題に解答すること。

科目	学部・学科等	解答する問題番号
数学 I 数学 A	教育学部 小学校教員養成課程 (音楽・図工・体育を除く) 特別支援教育教員養成課程 幼稚園教員養成課程 中学校教員養成課程 (技術科教育分野)	1 2 3 4
数学 I 数学 II 数学 A 数学 B	国際教養学部 文学部 法政経学部 園芸学部 先進科学プログラム 人文学科(行動科学コース) 物理化学・生命化学関連分野 人間科学関連分野	2 4 5 6
	教育学部 中学校教員養成課程 (数学科教育分野)	2 3 4 5 6 8
数学 I 数学 II 数学 III 数学 A 数学 B	理学部 物理学科, 化学科 生物学科, 地球科学科 薬学部 工学部 先進科学プログラム 物理学関連分野 工学関連分野	5 7 8 9 10
	医学部	5 7 9 11 12
	理学部 数学・情報数理学科	5 7 8 9 11 12