

# 数 学

<監督者の指示があるまで開いてはいけない>

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。  
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。  
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の  にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) 大、中、小 3 個のさいころを同時に投げるとき、それぞれのさいころの出る目を  $a, b, c$  とする。出る目に応じて、得点を次のように定める。

・  $a + b < c$  のとき、得点を  $(a + b + c)$  点とする。

・  $a + b \geq c$  のとき、得点を  $2(a + b + c)$  点とする。

このとき、得点が 5 点となる確率は  (ア) であり、得点が 8 点以下となる確率は  (イ) である。

(2)  $\triangle ABC$  に半径 2 の円が内接し、 $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \angle BCA = \frac{5}{13}$  のとき、辺 BC の長さは  (ウ) であり、 $\triangle ABC$  の面積は  (エ) である。

2.  $m$  は定数で、 $m > 1$  とする。関数  $f(x) = \int_x^{mx} \frac{|t-e|}{t} dt$  ( $x > 0$ ) について、次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $f(x)$  を求めよ。また、 $f(x)$  が最小値をとる  $x$  の値を  $a$  とするとき、 $a$  を  $m$  を用いて表せ。
- (2)  $a$  を (1) で求めた値とする。曲線  $y = f(x)$  とその曲線上の点  $(e, f(e))$  における接線、および直線  $x = a$  で囲まれた部分の面積を  $S(m)$  とするとき、極限  $\lim_{m \rightarrow \infty} S(m)$  を求めよ。必要ならば  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  を用いてよい。

3. 定数  $p$  は素数とし、条件

$$a(ab - p^2) = c^2, \quad b \leq 2c$$

をみたす自然数の組  $(a, b, c)$  を考える。 $a$  が素数であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 自然数の組  $(a, b, c)$  の個数を、 $p$  を用いて表せ。
- (2)  $a, b, c$  の最大公約数が 1 となるような自然数の組  $(a, b, c)$  の個数を、 $p$  を用いて表せ。

4. 複素数平面上の3点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  は正三角形  $ABC$  をなし,  $\alpha\beta\gamma = -1$  をみたしている。  $\triangle ABC$  の重心  $D(\delta)$  が実軸上にあり  $\delta > -1$  であるとき, 次の問いに答えよ。ただし, 複素数平面上で複素数  $z$  を表す点  $P$  を  $P(z)$  と書く。

(1)  $\triangle ABC$  の外接円の半径  $\ell$  を  $\delta$  の式で表せ。

(2)  $\alpha, \beta, \gamma$  を  $\delta$  の式でそれぞれ表せ。ただし,  $-\pi \leq \arg \alpha < \arg \beta < \arg \gamma < \pi$  とする。  
ここで  $\arg z$  は複素数  $z$  の偏角を表す。