平成29（2017）年度

慶應義塾大学入学試験問題

医　学　部

数　学

注意事項

1. 受験番号と氏名は解答用紙の所定の記入欄にそれぞれ記入してください。
2. 受験番号は所定欄の枠の中に1字1字記入してください。
3. 解答は，必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
4. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
5. この問題冊子の総ページ数は12ページです。試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。ページの脱落や重複があったら直ちに監督者に申し出てください。
6. この問題冊子は，試験終了後に持ち帰ってください。

— 下書き計算用 —

— 下書き計算用 —

［I］

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問（3）（ii）に答えなさい。

（1） 不等式

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x \leqq 7\left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$$

をみたす実数 x の範囲を不等式で表すと $\boxed{\text{（あ）}}$ である。

（2） 1 以上 100 以下のすべての自然数の集合を U とする。U の部分集合 A および B を

$A=\{n \mid n \in U$ かつ n を 5 で割ると 2 余る$\}$，$B=\{n \mid n \in U$ かつ n を 7 で割ると 1 余る$\}$

と定めるとき，集合 $A \cup B$ に属する自然数の総和は $\boxed{\text{（い）}}$ である。

（3） 与えられた n 個の実数 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ に対して，関数

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}|x-x_i|$$

を考える。

（i） $f(x)$ は x の連続関数であり，各々の開区間 $(x_{i-1},\ x_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$ において微分可能である。ただし $x_0=-\infty$，$x_{n+1}=\infty$ とおく。区間 $(x_{i-1},\ x_i)$ において $f(x)$ を微分すると $f'(x)=\boxed{\text{（う）}}$ である。

（ii） ある実験において計測を n 回繰り返し行って，データ $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ を得た。これらのデータの中央値を m とするとき，関数 $f(x)$ は $x=m$ において最小値をとることを示しなさい。

— 下書き計算用 —

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

袋が1つと赤玉，白玉がそれぞれ3個ずつ用意されている。袋の中に玉が3個入った状態に対して，以下の操作Tを考える。

操作T

(T1) 袋の中から無作為に玉を2個取り出す。

(T2) (a) 取り出した2個の玉の色が異なる場合は，取り出した2個の玉をそのまま袋に戻す。

(b) 取り出した2個の玉の色が同じ場合は，その色と異なる色の玉を2個袋の中に入れる。

ここで次の2つの状態を考える。

状態A：袋の中に赤玉2個と白玉1個が入っている状態。

状態B：袋の中に白玉3個のみが入っている状態。

以下nを自然数とし，状態Aから始めて操作Tを繰り返し行う。

(1) n回の操作を繰り返し終えたとき状態Aである確率をp_nとすると，$p_1 = \boxed{\text{（あ）}}$ であり，一般に$p_n = \boxed{\text{（い）}}$ である。

(2) n回の操作を終えるまでに状態Bが1回だけおこる確率をq_nとすると，$q_4 = \boxed{\text{（う）}}$ であり，一般に$q_n = \boxed{\text{（え）}}$ である。

(3) n回の操作を終えるまでに状態Bがちょうど2回おこる確率をr_nとすると，$r_4 = \boxed{\text{（お）}}$ であり，一般に$n \geqq 3$のとき$r_n = \boxed{\text{（か）}}$ である。

— 下書き計算用 —

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

座標平面における円 $x^2+y^2=4$ を C とし，C の内側にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を1つ固定する。C 上に点Qをとり，線分 QP の垂直二等分線と線分 OQ との交点をRとする。ただしOは座標原点である。点Qが円 C 上を一周するとき，点Rが描く軌跡を $S(a,\ b)$ とする。

(1)　$S(a,\ b)$ は長軸の長さ $\boxed{\text{（あ）}}$，短軸の長さ $\boxed{\text{（い）}}$ の楕円である。点Rの x 座標と y 座標をそれぞれ $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（ただし $r>0$ かつ $0\leqq\theta<2\pi$）とすると，$S(1,\ 1)$ の方程式は $r=\boxed{\text{（う）}}$ と表される。$S(1,\ 1)$ 上の点で y 座標が最大となる点の座標を $(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$ とすると $r_0=\boxed{\text{（え）}}$，$\theta_0=\boxed{\text{（お）}}$ である。

(2)　t を $0<t<2$ の範囲で動かすとき，$S(t,\ 0)$ が通過してできる領域の面積は $\boxed{\text{（か）}}$ である。

— 下書き計算用 —

[Ⅳ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

xyz 空間の zx 平面にある曲線 $z=x^2$ の，$0\leqq z\leqq h$ に対する部分を C とする。ただし $h>0$ である。回転軸 ℓ を z 軸にとり，C を ℓ のまわりに1回転させて得られる曲面からなる容器を S とする。S に水を満たした後，S の回転軸 ℓ を z 軸に対して角 θ だけ傾ける。以下 $a=\tan\theta$ とおく。

(1) 水がすべてこぼれず，容器の中に残るための条件は $0\leqq a<$ $\boxed{\text{(あ)}}$ である。このとき空気に触れている水面の面積を $T(a)$ とすると $T(a)=$ $\boxed{\text{(い)}}$ である。$\lim\limits_{a\to+0}T'(a)=$ $\boxed{\text{(う)}}$ であり，a の関数 $T(a)$ が $0<a<$ $\boxed{\text{(あ)}}$ の範囲に極大値をもつための条件は $h>$ $\boxed{\text{(え)}}$ である。

(2) $a=\sqrt{h}$ のとき容器に残った水の体積 V を求めると $V=$ $\boxed{\text{(お)}}$ である。ただしその計算にあたって必要ならば次の定積分の値を用いてよい。

$$\int_0^1(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{3\pi}{16},\quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{3\pi}{128},\quad \int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{\pi}{16}$$

— 下書き計算用 —