平成29年度入学試験問題

数　　学（理，医，歯，工学部）

注意事項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で5ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）
別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された2箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，選抜方法）	解答すべき問題（○印）					解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5		
理学部（選抜方法A）及び工学部	○	○	○	○	○	5枚	120分
理学部（選抜方法B，C）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○		4枚	90分
医学部（医学科）及び歯学部		○	○	○	○	4枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

$\boxed{1}$ 式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1) $(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2) $(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3) $(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。

$\boxed{2}$ 座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$, 3 点 B, C, D は, それぞれ x 軸, y 軸, z 軸上にある。さらに, これらの 4 点は同一平面上にあり, 四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 3 点 B, C, D の座標を求めよ。

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3) 原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

3 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3) 不等式 $a_n > 1 - 10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

4　t は，$t > \dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする。座標平面上に楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ が与えられている。点 $\mathrm{P}(-1, -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を ℓ，その接点を $\mathrm{Q}(a, b)$ とする。また，x 軸，y 軸および接線 ℓ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{Q}(a, b)$ における接線 ℓ の方程式は，$ax + 4by = 1$ であることを示せ。

(2) a, b を，それぞれ t を用いて表せ。

(3) 面積 $S(t)$ を，t を用いて表せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{S(t)}{t}$ を求めよ。

5 $f(x) = xe^{1-x^2}$ とする。2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする。ただし，k は自然数とする。次の問いに答えよ。必要があれば

$$\lim_{x \to \infty} xe^{-x^2} = 0$$

が成り立つことを用いてよい。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値，グラフの凹凸と変曲点，および漸近線を求め，グラフの概形をかけ。

(3) S_k を, k を用いて表せ。

(4) 次の条件 $(*)$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

$(*)$ すべての自然数 m に対して，$4S_{2n-1} > 7S_{2m}$ が成り立つ。