

一般入試 数学

I ア , ケ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものをそれぞれ1つずつ選べ.

3人の力士 A, B, C が下記 <sup>ともえ</sup> 巴戦のルールに従い相撲をとり、優勝者を決める

- 1回目の取り組みは力士 A と B が対戦する.
- $n$  を 2 以上の自然数として,  $n$  回目の取り組みは,  $n - 1$  回目の取り組みの勝者と, その取り組みに参加していなかった力士が対戦する.
- 2 連勝した力士を優勝とし, 優勝者が決定した時点で巴戦は終了とする.

1 回の取り組みで, 力士 A が B に勝つ確率は  $\frac{1}{2}$ , B が C に勝つ確率は  $p$ , C が A に勝つ確率は  $1 - p$  であり, 相撲の勝負に引き分けはないものとして, 以下の問いに答えよ.

(a) 3 回目の取り組み終了時点で優勝者が決まらない場合, 4 回目の取り組みは ア である. 6 回目の取り組みで力士 C が優勝する確率は,  $p = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$  のとき最大値  $\frac{\text{エオ}}{\text{カキク}}$  をとる. 何回かの取り組みを行って力士 A が優勝する確率を  $\alpha$ , 力士 B が優勝する確率を  $\beta$  とすると ケ .

(b)  $p = \frac{1}{3}$  のとき, 3 回目の取り組みで力士 C が優勝する確率は  $\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$  であり, 何回かの取り組みを行って力士 C が優勝する確率は  $\frac{\text{シ}}{\text{ス}}$  となる.

(c) 3 人の力士が優勝する確率が等しくなるのは  $p = \frac{\text{セソ} - \sqrt{\text{タチ}}}{\text{ツテ}}$  のときである.

ア の解答群

- ① 必ず力士 A と B の対戦    ② 必ず力士 B と C の対戦    ③ 必ず力士 A と C の対戦  
 ④ 力士 A が参加するが対戦相手は不定    ⑤ 力士 B が参加するが対戦相手は不定  
 ⑥ 力士 C が参加するが対戦相手は不定    ⑦ どの力士同士の対戦となるか不定

ケ の解答群

- ①  $\alpha < \beta$  が成り立つ    ②  $\alpha = \beta$  が成り立つ    ③  $\alpha > \beta$  が成り立つ  
 ④  $\alpha \leq \beta$  が成り立つ    ⑤  $\alpha \geq \beta$  が成り立つ    ⑥  $\alpha \neq \beta$  が成り立つ  
 ⑦  $p$  の値によって  $\alpha, \beta$  の大小関係が変化する

II 座標空間において、点  $C(0, 0, 1)$  を中心とする半径 1 の球面を  $S$ 、点  $A(1, 0, 3)$  から球面  $S$  に引いた接線の接点を  $P(x, y, z)$ 、接線と  $xy$  平面との交点を  $Q(X, Y, 0)$  とする。

(a) 点  $P$  は球面  $S$  上にあるので  $x^2 + y^2 + (z - \boxed{\text{ア}})^2 = \boxed{\text{イ}}$  を満たし、

$\vec{CP} \cdot \vec{AP} = \boxed{\text{ウ}}$  であるので、次式が成り立つ。

$$x + \boxed{\text{エ}} z = \boxed{\text{オ}} \quad \dots \dots (*)$$

この式は平面を表す。この式が表す平面と球面  $S$  との交線は、

点  $\left( \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \boxed{\text{ク}}, \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \right)$  を中心とする半径  $\frac{\boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$  の円になる。

また、

$$|\vec{AP}| = \boxed{\text{セ}} \quad \dots \dots (**)$$

が成り立つ。

(b) 点  $Q$  は直線  $AP$  上にあるため、 $\vec{AQ} = k\vec{AP}$  を満たす実数  $k$  が存在するが、式(\*)よりこの実数  $k$  は

$$k = \frac{\boxed{\text{ソ}} - X}{\boxed{\text{タ}}}$$

と表されることがわかる。これと式(\*\*)より、点  $Q$  の座標に対して次式が成立する。

$$X^2 + \boxed{\text{チ}} X + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} Y^2 = \boxed{\text{ト}}$$

この式が表す  $xy$  平面上の楕円の焦点は、原点と点  $(\boxed{\text{ナニ}}, \boxed{\text{ヌ}}, 0)$  である。

Ⅲ 三角関数の極限に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 定数  $k$  に対して, 極限

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3\theta + k \cos 2\theta}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 3}$$

が有限の値となるのは  $k =$   のときであり, このとき極限値は  である.

- (2) 正の実数  $x$  に対して, 下記極限で定義される関数を  $f(x)$  とする

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow 2} \frac{\cos ax - \cos 2x}{a^2 + a - 6}$$

このとき, 関数  $f(x)$  は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{オ}}{\text{キク}} \sqrt{\text{カ}} \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{\text{シス}}{\text{セソ}}$$

を満たす.

また,  $x > 0$  の範囲で  $y = f(x)$  のグラフが直線  $y = ax + b$  と共有点を持たないのは,

$$a > \frac{\text{タ}}{\text{チ}} \text{ かつ } b > \text{ツ} \text{ を満たすとき, または } a < \frac{\text{テト}}{\text{ナ}} \text{ かつ } b < \text{ニ}$$

を満たすときである.

IV 座標平面上を運動する点  $P(x, y)$  の座標が, 時刻  $t$  において

$$x = -\sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}t, \quad y = t^3 - 3t^2 + 2t$$

であり, 時刻  $t$  が  $0 \leq t \leq 1$  の範囲で変化したときの点  $P$  の軌跡を曲線  $C$  とする

(a) 点  $P$  の  $y$  座標は  $t = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$  のとき最大値  $\frac{\boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$  をと

る. また,  $0 < t < 1$  のとき, 点  $P$  における曲線  $C$  の接線と  $x$  軸とのなす鋭角が  $\frac{\pi}{6}$  となるのは

$t = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$  のときである.

(b) 時刻  $t$  における点  $P$  の速さは  $\boxed{\text{ケ}} t^2 - \boxed{\text{コ}} t + \boxed{\text{サ}}$  と表される. また, 曲線  $C$  の長さは  $\boxed{\text{シ}}$  である.

(c) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積は  $\frac{\boxed{\text{ス}} \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$  である.