平 成 29 年 度 入 学 試 験 問 題 (前期日程)

数 学 甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B)

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

注 意 事 項

1. 受験番号を所定の欄に記入すること。

2. 解答は，必ず解答欄に記入すること。

3. 解答時間は，120 分である。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　定積分 $\displaystyle\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx$ を求めよ。

問 2　$t > 0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{t},\ \log t)$ と直線 $y = x$ との距離が最小になる t の値とそのときの距離を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。(50 点)

問 1　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，方程式 $2\sin\theta = \sin 3\theta$ を満たす θ の値を求めよ。

問 2　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta - 2\sin\theta|\,d\theta$ を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

$\boxed{3}$ zを複素数とする。$z+\dfrac{3}{z}$が実数であり，$3 \leqq z+\dfrac{3}{z} \leqq 4$となる$z$の動く範囲を複素数平面上に図示せよ。(50 点)

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
小計	

3 解答欄

4 袋の中に赤玉4個と白玉6個が入っている。Aが玉を2個取り出し，取り出した玉の色を確認して，もし2個とも赤玉なら赤玉1個を，それ以外の場合は白玉1個を袋に戻し，次にBがその袋から玉を2個取り出す。次の問いに答えよ。(50点)

問1　Aが白玉2個を取り出し，かつBが赤玉2個を取り出す確率を求めよ。

問2　Bが赤玉2個を取り出す確率を求めよ。

問3　Bが取り出した玉が赤玉2個であったとき，Aが取り出した玉が白玉2個である条件付き確率を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学 甲	
1	
2	
3	
4	
合計	

受　験　番　号

甲　解答例

$\boxed{1}$ ［これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。］

問 1

$$\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)dx = \Big[x-\log|x|\Big]_1^2$$
$$= 2-\log 2-1$$
$$= 1-\log 2$$

問 2　$\mathrm{P}(\sqrt{t}, \log t)$ と直線 $y=x$ との距離 d は

$$d = \frac{|\sqrt{t}-\log t|}{\sqrt{1^2+1^2}}.$$

$t>0$ に対して $f(t)=\sqrt{t}-\log t$ とすると，

$$f'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{\sqrt{t}-2}{2t}.$$

$f'(t)=0$ を解いて $t=4$. これより $f(t)$ の増減表は

t	0	$\cdots\cdots$	4	$\cdots\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	最小	↗

ここで，$f(4)=\sqrt{4}-\log 4 = 2(1-\log 2)$ であるが，問 1 で $1<x\leqq 2$ のとき $1-\dfrac{1}{x}>0$ であるから，

$$1-\log 2 = \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)dx > 0.$$

したがって，すべての $t>0$ に対して $f(t) \geqq 2(1-\log 2) > 0$ であるので，

$$d = \frac{f(t)}{\sqrt{2}} \geqq \sqrt{2}(1-\log 2).$$

以上より，$t=4$ のとき最小値 $\sqrt{2}(1-\log 2)$ をとる。

$\boxed{2}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1

$$\begin{aligned}\sin 3\theta - 2\sin\theta &= \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta - 2\sin\theta \\ &= \sin\theta(1-2\sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin\theta \\ &= \sin\theta(1-4\sin^2\theta) = 0.\end{aligned}$$

よって，$\sin\theta = 0, \pm\dfrac{1}{2}$.

これを $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意して解くと，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

問 2　$f(\theta) = \sin 3\theta - 2\sin\theta$ とすると，

$$f'(\theta) = 3\cos 3\theta - 2\cos\theta.$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ と問 1 より $f(\theta) \fallingdotseq 0$ であるから，$f(\theta) > 0$.

$\dfrac{\pi}{6} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta > \dfrac{1}{2}$ であるから $f(\theta) < 0$.

したがって，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta - 2\sin\theta|\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3\theta - 2\sin\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta - \sin 3\theta)\,d\theta \\ &= \left[-\frac{1}{3}\cos 3\theta + 2\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-2\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\cdot 0 + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3} + 2\right) + 0 - \left(-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0\right) \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

$z+\dfrac{3}{z}$ は実数なので

$$z+\frac{3}{z}=\overline{z+\frac{3}{z}}=\overline{z}+\frac{3}{\overline{z}}.$$

両辺に $z\overline{z}$ をかけて整理すると,

$$z^2\overline{z}+3\overline{z}-\left(z\overline{z}^2+3z\right)=(z-\overline{z})(z\overline{z}-3)=0.$$

これより, $z=\overline{z}$ または $z\overline{z}=3$.

$z=\overline{z}$ のとき, z は実数で

$z+\dfrac{3}{z}\geqq 3$ より, $z>0$. よって, $3z\leqq z^2+3\leqq 4z$.

$z^2+3-3z=\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ となり $3z\leqq z^2+3$ はすべての実数 z で満たされる。

$z^2+3\leqq 4z$ について $z^2+3-4z=(z-3)(z-1)\leqq 0$ より $1\leqq z\leqq 3$.

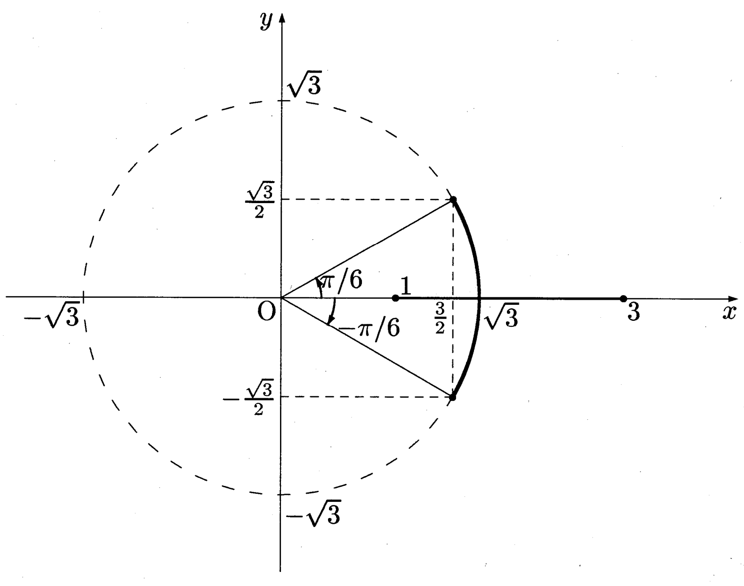
$z\overline{z}=3$ のとき, $|z|=\sqrt{3}$ より $z=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)$, $-\pi<\theta\leqq\pi$ とできる。ここで,

$$z+\frac{3}{z}=\sqrt{3}(\cos\theta+i\sin\theta)+\sqrt{3}(\cos\theta-i\sin\theta)=2\sqrt{3}\cos\theta.$$

よって, $z+\dfrac{3}{z}=2\sqrt{3}\cos\theta<4$ はつねに成立する。

一方, $3\leqq z+\dfrac{3}{z}=2\sqrt{3}\cos\theta$ より $\cos\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. すなわち, $-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$.

以上より, 下図の x 軸と円弧の太線部となる。



4 [これと解法が違っていても同じ結論が正しい論理により導かれていれば正解です。]

問 1　A_i で A が白玉 i 個取り出すという事象，B で B が赤玉 2 個取り出すという事象を表すとする。

A が白玉 2 個を取り出したとき，B が玉を取り出すとき袋の中には赤玉 4 個，白玉 5 個が入っているので，

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2)P_{A_2}(B) = \frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{6\cdot 5}{10\cdot 9}\frac{4\cdot 3}{9\cdot 8} = \frac{1}{18}.$$

問 2　A が白玉 1 個，赤玉 1 個を取り出したとき，B が玉を取り出すとき袋の中には赤玉 3 個，白玉 6 個が入っているので，

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) = \frac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{2\cdot 6\cdot 4}{10\cdot 9}\frac{3\cdot 2}{9\cdot 8} = \frac{2}{45}.$$

A が赤玉 2 個を取り出したとき，B が玉を取り出すとき袋の中には赤玉 3 個，白玉 6 個が入っているので，

$$P(A_0 \cap B) = P(A_0)P_{A_0}(B) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{4\cdot 3}{10\cdot 9}\frac{3\cdot 2}{9\cdot 8} = \frac{1}{90}.$$

よって，事象 $A_0 \cap B, A_1 \cap B, A_2 \cap B$ は互いに排反なので

$$P(B) = P(A_0 \cap B) + P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) = \frac{1+4+5}{90} = \frac{1}{9}.$$

問 3　$P_B(A_2) = \dfrac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}} = \dfrac{1}{2}.$