平成29年度
前期日程

数　　学

教育学部［数学（ロ）］

医学部医学科

工学部

問　題　冊　子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は5ページで，解答用紙は5枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，5枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問5題である。
5. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
6. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
7. 解答用紙は持ち帰らないこと。
8. 問題冊子は持ち帰ること。
9. 大問ごとに，満点に対する配点の比率(%)を表示してある。

1 1000 から 2017 までの 4 桁の整数について，以下の問に答えよ。

(1) 3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる整数の個数を求めよ。

(2) 1000 や 2002 のように異なる 2 種類の数字から成る整数の個数を求めよ。

(3) 2017 のように異なる 4 種類の数字から成る整数の個数を求めよ。

(配点比率 20 %)

2 xy 平面上に原点 O を中心とした半径 2 の円 C がある。$p > 2$ とし，点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通り，円 C に接する 2 本の直線を考える。これらの直線と円 C との接点を点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，点 $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ $(a_2 > b_2)$ とする。また三角形 ABP の重心を点 G とする。以下の問に答えよ。

(1) 点 A と点 B の座標を p を用いて表せ。

(2) 点 G の座標を p を用いて表せ。

(3) 点 G が円 C の円周上にあるとき，∠APB の大きさを求めよ。

(4) p が $p > 2$ の範囲を動くとき，線分 OG の長さ d の最小値とそのときの p の値を求めよ。

(配点比率 20 %)

3 n を3以上の整数とする。半径1の円に内接する正 n 角形の面積を I_n，外接する正 n 角形の面積を E_n とする。m を正の整数とし，$a_m = \cos\left(\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right)$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $a_2 = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ が成り立つことを示せ。

(2) I_n と E_n を，n と三角比を用いて表せ。

(3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right)$ と $\tan\left(\dfrac{\pi}{3 \cdot 2^m}\right)$ を，a_m を用いて表せ。

(4) 面積の比較により $\pi > I_n$ および $\pi < E_n$ となることを用いて，

$$3 \cdot 2^m \sqrt{1 - a_m^2} < \pi < 3 \cdot 2^m \frac{\sqrt{1 - a_m^2}}{a_m}$$

が成り立つことを示せ。

(5) (4)を用いて，

$$3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) < \pi < 12(2 - \sqrt{3})$$

が成り立つことを示せ。

(配点比率 20 %)

4 関数$f(x)$を

$$f(x) = e^{-x}|\sin x|$$

で定める。また，正の整数nに対して

$$I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)\,dx$$

とする。以下の問に答えよ。

(1) I_1の値を求めよ。

(2) I_nの値を求めよ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$の値を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n$の値を求めよ。

(配点比率 20 %)

5 複素数 z_n を

$$z_1 = 1, \quad z_{n+1} = a(z_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。ただし，i を虚数単位とし，$a = \dfrac{i}{2}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) a の絶対値 $|a|$ と偏角 $\arg a$ を求めよ。ただし，偏角の範囲は $0 \leqq \arg a < 2\pi$ とする。

(2) $z_{n+1} + b = a(z_n + b)$ となる複素数 b を求めよ。

(3) z_n の実部 x_n，虚部 y_n を求めよ。

(4) (3)の x_n と y_n について，$\lim_{n \to \infty} x_n$ と $\lim_{n \to \infty} y_n$ をそれぞれ求めよ。

（配点比率 20 %）