平成 30 年度
前期日程

数　　学

教育学部[数学(ロ)]

医学部医学科

工学部

問題冊子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで，解答用紙は 5 枚である。
   落丁，乱丁，印刷不鮮明などの箇所があった場合には，ただちに試験監督者に申し出ること。
3. **受験番号は，5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。**
4. 問題は，大問 5 題である。
5. **解答は，解答用紙の指定箇所に記入すること。ただし，やむをえない場合は裏面にまわってよいが，表面に「裏に続く」と明記すること。**
6. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
7. 解答用紙は持ち帰らないこと。
8. 問題冊子は持ち帰ること。
9. 大問ごとに，満点に対する配点の比率(%)を表示してある。

$\boxed{1}$　m, n を $m > n + 1$ をみたす自然数とする。$S(n) = \sum_{k=1}^{6n} k^2$ とする。以下の問に答えよ。

(1)　$S(n)$ を n を用いて表せ。

(2)　$S(m) - S(n) = (m - n)T(m, n)$ となる $T(m, n)$ を m, n を用いて表せ。

(3)　$S(m) - S(n) = 2018$ をみたす m, n を求めよ。ただし，必要ならば，1009 が素数であることを用いてよい。

（配点比率 20 %）

2 原点をOとする座標空間に点A(2, 0, 0)，B(3, $\sqrt{3}$, 0)，C(x, y, z)がある。点Cは内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$，$|\overrightarrow{BC}|=2$ をみたすとする。また，$t=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) t を x を用いて表せ。

(2) 条件 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$ から x，y，z がみたす関係式を求めよ。また，条件 $|\overrightarrow{BC}|=2$ から x，y，z がみたす関係式を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}$ を t を用いて表せ。

(4) $-2\leqq t\leqq 4$ となることを示せ。また，$t=4$ のとき，点Cの座標(x, y, z)を求めよ。

(5) $|\overrightarrow{OC}|$ の最大値を求めよ。

(配点比率 20 %)

$\boxed{3}$ a，b を実数とする。関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = a\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

とする。以下の問に答えよ。

(1) 0 以上の実数 r と実数 α，β に対して，$p = r\cos\beta$，$q = r\sin\beta$ とおく。r を p と q を用いて表せ。また，次の等式が成り立つことを示せ。

$$r\sin(\alpha+\beta) = p\sin\alpha + q\cos\alpha$$

(2) 関数 $y = f(\theta)$ の最小値 m，最大値 M を a，b を用いてそれぞれ表せ。

(3) すべての θ に対して $f(\theta) \geqq 0$ となる条件を a，b を用いて表せ。

(4) すべての θ に対して $f(\theta) \leqq 0$ となる条件を a，b を用いて表せ。

(5) 関数 $y = f(\theta)$ が θ の値によって正の値も負の値もとりうる条件を a，b を用いて表せ。また，この条件をみたす点 (a, b) 全体の集合を ab 平面上に図示せよ。

(配点比率 20 %)

4 a を正の定数とする。極方程式

$$r = e^{a\theta} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

で表される xy 平面上の曲線を C とする。曲線 C 上の点Pの座標を $(x,\ y)$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $x,\ y$ を θ を用いてそれぞれ表せ。

(2) 曲線 C の長さを求めよ。

(3) 点Pにおける曲線 C の接線の方程式を θ を用いて表せ。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。

(4) 曲線 C 上の点Pと原点を通る直線を ℓ，点Pにおける曲線 C の接線を m とする。ℓ と m のなす角はPによらず一定であることを示せ。

(5) ℓ と m のなす角が $\dfrac{\pi}{12}$ となるような a の値を求めよ。

(配点比率 20 %)

5 以下の問に答えよ。

(1) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx$$

(2) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\,dx$$

(3) 正の実数 x, h に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2}<\frac{\log(x+h)-\log x}{h}<\frac{1}{x}$$

(4) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\log\frac{k+n+1}{k+n}\right)\log\frac{k+n}{n}$$

(配点比率 20 %)