

数 学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は4ページである。
3. 問題は、**1** ～ **5** の5題ある。
4. 解答用紙は、**1** ～ **5** のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. **3** は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら、まず、黒板等に掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が、自分に配付された数と合っているか確認し、もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に、解答用紙をマシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し、学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから、解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は、必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし、裏面には決して記入しないこと。
8. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) $AB = 2$, $BC = 1$, $CA = \sqrt{3}$ のとき, 三角形 ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(2) $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y) \sin(x-y)$ を示せ。

(3) p を素数とすると, $1 \leq k \leq p-1$ を満たす自然数 k に対して, 二項係数 ${}^p C_k$ は p の倍数であることを示せ。

2 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 4$ の交点を A , B とする。点 P が曲線 $y = x^2$ 上を $-2 < x < 2$ の範囲で動くとする。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 三角形 ABP の重心 G の軌跡を求めよ。

(2) (1) で求めた軌跡と直線 $y = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 次の 3—1 3—2 3—3 から1題を選択して解答せよ。

解答用紙の所定の欄に、解答する問題の番号を記入すること。

3—1 数列 $\{a_n\}$ が自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して関係式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \dots\dots (*)$$

を満たすとき、「数列 $\{a_n\}$ は漸化式(*)を満たす」という。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 初項と公比がともに $r (\neq 0)$ である等比数列で漸化式(*)を満たす数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。ただし、 $b_1 > c_1$ とする。
- (2) 二つの数列 $\{d_n\}$, $\{e_n\}$ がともに漸化式(*)を満たすとき、二つの実数 k, l に対して $f_n = kd_n + le_n$ で定められる数列 $\{f_n\}$ も漸化式(*)を満たすことを示せ。
- (3) (1) で得られた数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ と二つの実数 k, l に対して、 $a_n = kb_n + lc_n$ とおくと $a_1 = 21$, $a_2 = 57$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3—2 三角形 ABC とその内部に点 O があり、正の実数 k, l に対して

$$\vec{OA} + k\vec{OB} + l\vec{OC} = \vec{0}$$

を満たしていると仮定する。さらに直線 OA と辺 BC, 直線 OB と辺 CA, 直線 OC と辺 AB の交点をそれぞれ D, E, F とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) $\vec{OD} = x\vec{OA}$ とおくと x を k, l を用いて表せ。さらに $\frac{OD}{AD}$ を k, l を用いて表せ。
- (2) $\vec{OE} = y\vec{OB}$ とおくと y を k, l を用いて表せ。さらに $\frac{OE}{BE}$ を k, l を用いて表せ。
- (3) $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$ を示せ。

3 — 3

1個のサイコロを投げ、1の目が出るまでこれを繰り返す。ただし、このサイコロ投げを繰り返す最大の回数は N 回とし ($N \geq 2$)、 N 回まで繰り返して1の目が出なければ、終了する。このサイコロ投げにおける繰り返し回数を X とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 確率 $P(X = k)$ を、 $k < N$ と $k = N$ の場合に分けて求めよ。
- (2) X の期待値を求めよ。

4 関数 $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$ について、次の各問いに答えよ。ただし、 $x \geq 0$ とする。また、 $\log(x+1)$ は $x+1$ の自然対数を表す。

(1) 自然対数の底 e に対して、 $t \geq 0$ のとき $e^t > \frac{t^2}{2}$ が成立することをを用いて

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$$

を示せ。

(2) $f(x)$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフをかけ。

(3) 自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して正の数 a_n を、曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a_n$ および x 軸で囲まれた部分の面積が n^2 に等しくなるように定める。この a_n を求めよ。

(4) (3) で定まる数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。

5 複素数平面上の点 z が $|4 - 3i - iz| = 2$ を満たすとする。このとき、次の各問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) 点 z の全体が表す図形を求めよ。

(2) $|z|$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) $w = \frac{1}{z+1+4i}$ とする。点 w の全体が表す図形を求めよ。さらに、 $|w|$ の最小値を与える w を求めよ。ただし、 $z \neq -1 - 4i$ とする。