

(平 30 前)

数 学

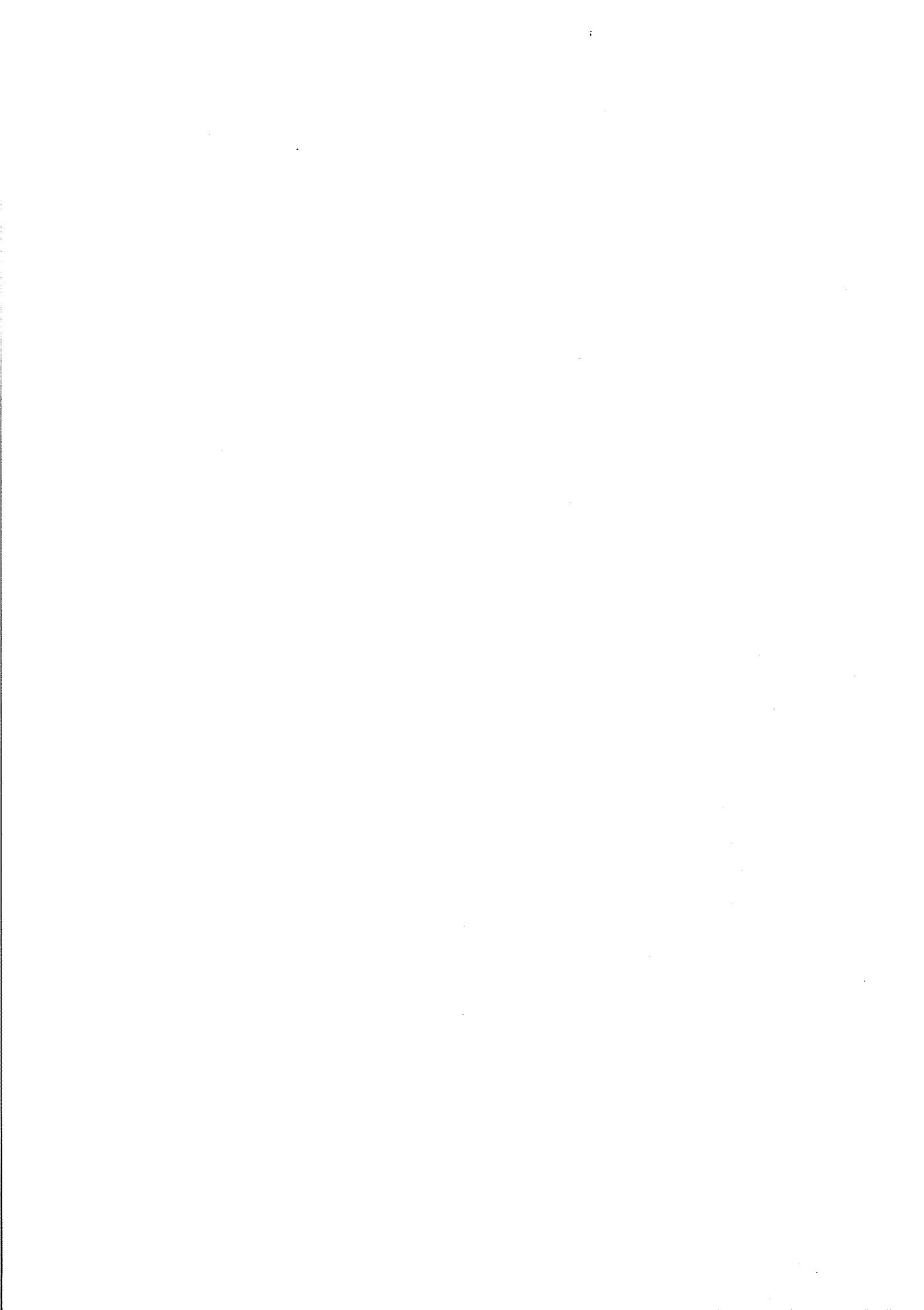
(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点





1. t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P, 辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q, 辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とする。以下の間に答えよ。
(配点 30 点)

- (1) \overrightarrow{QP} と \overrightarrow{QR} を $t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ のとき, t の値を求めよ。
- (3) t が (2) で求めた値をとるとき, $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

2. k を 2 以上の整数とする. また

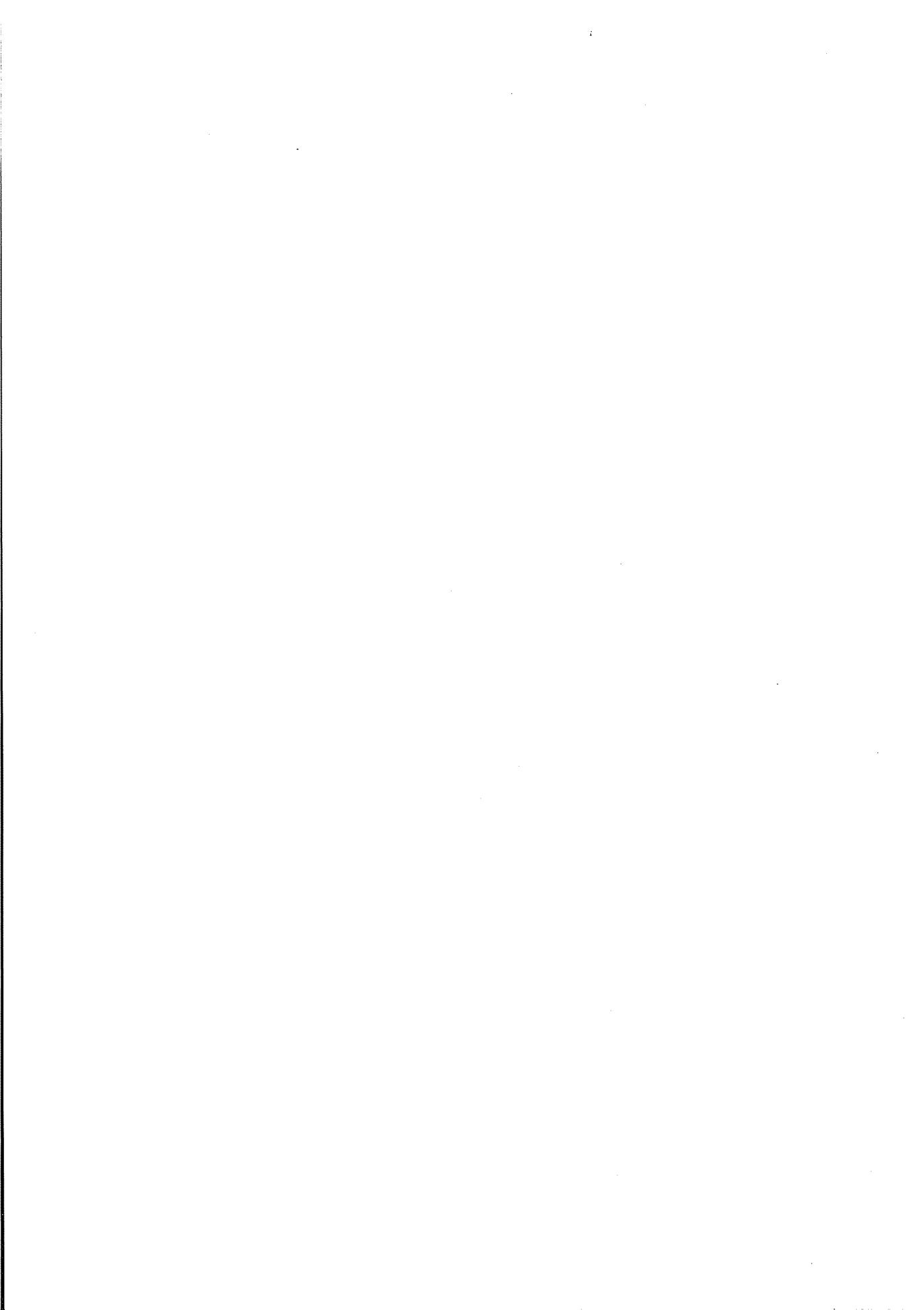
$$f(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$$

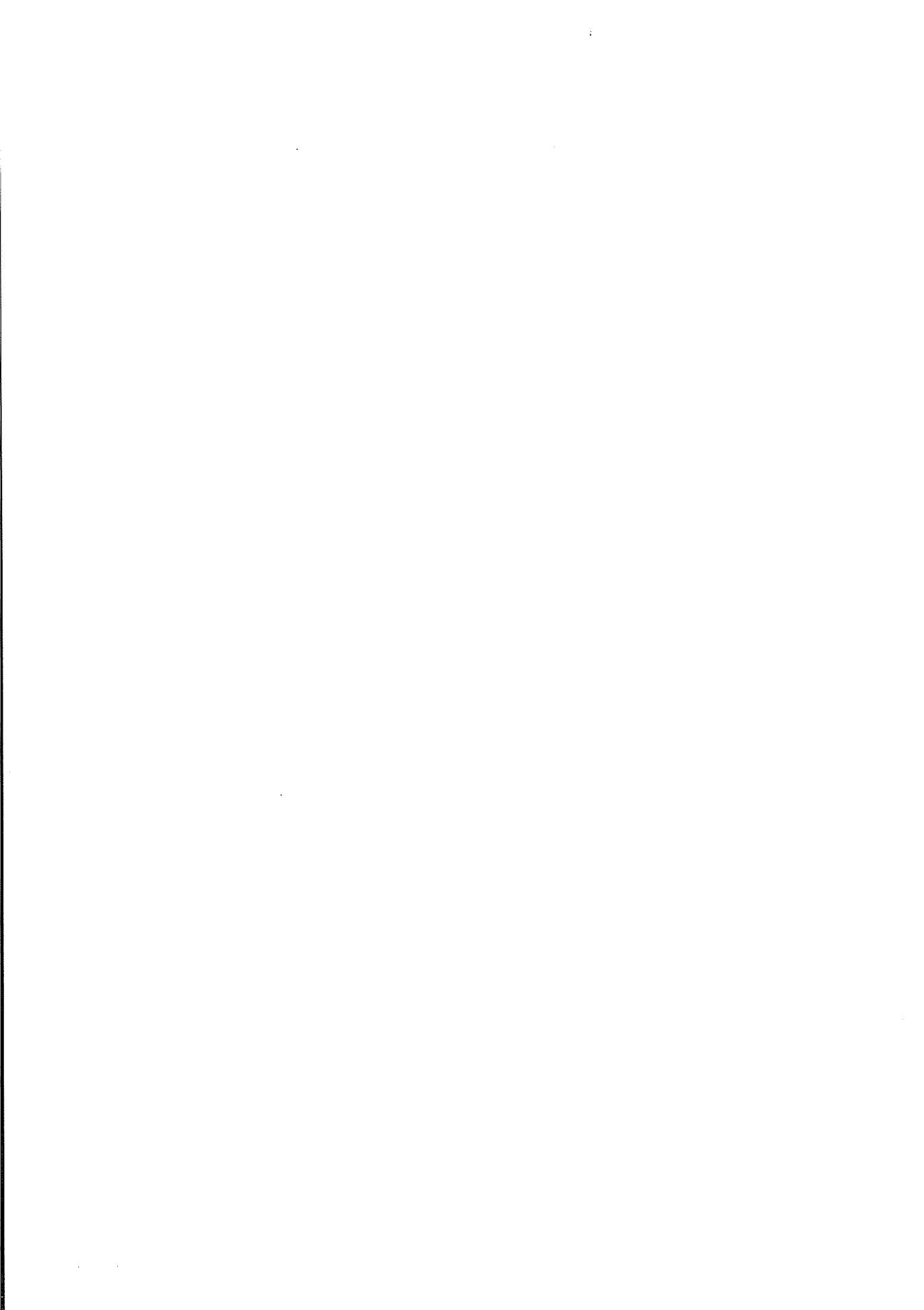
とおく. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $x > 0$ において, 関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ.
- (2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとき, $x_n > 1$ を示せ.
- (3) (2) の数列 $\{x_n\}$ に対し,

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ. また $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.





3. さいころを3回ふって、1回目に出た目の数を a , 2回目と3回目に
出た目の数の和を b とし、2次方程式

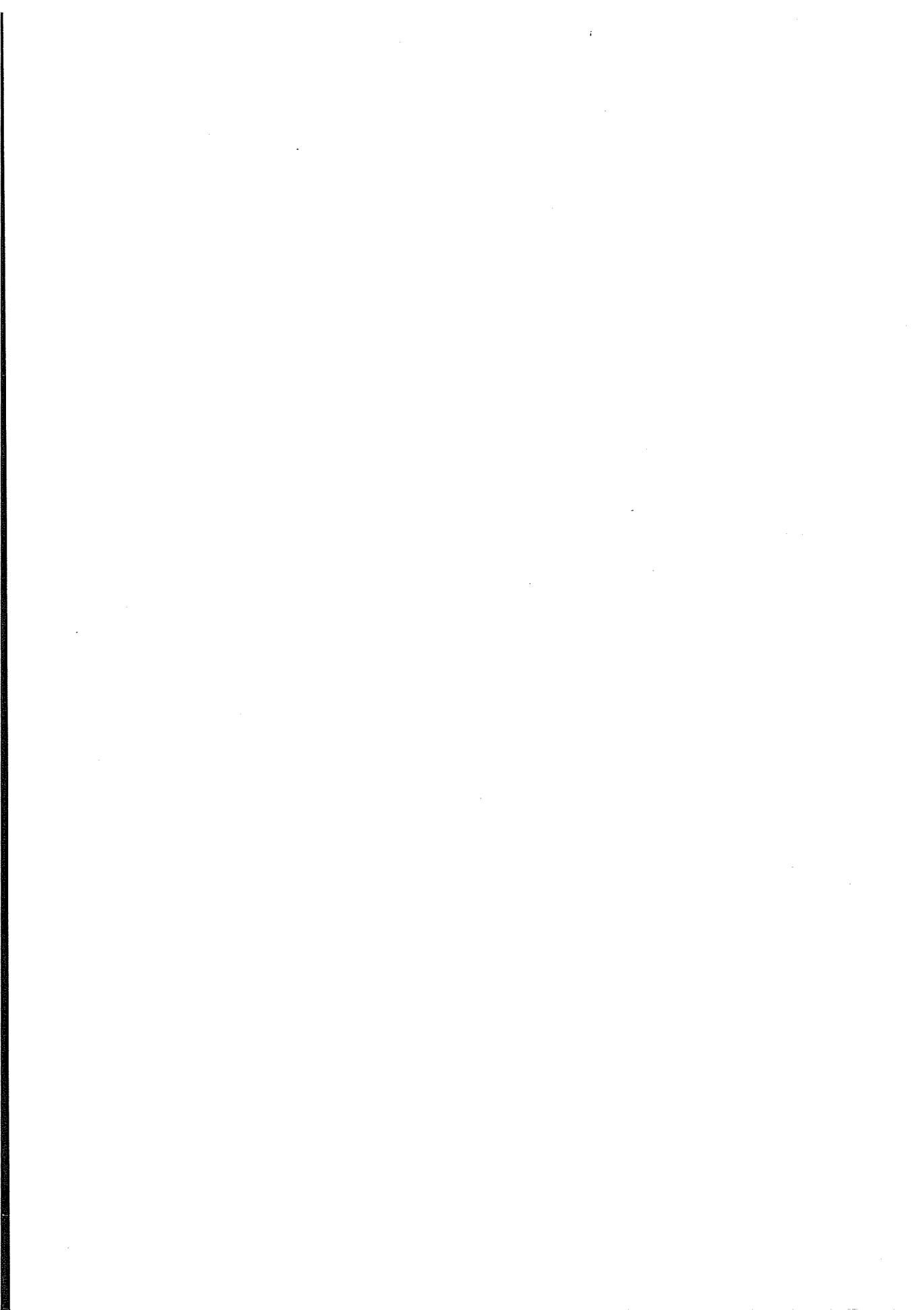
$$x^2 - ax + b = 0 \quad \dots\dots (*)$$

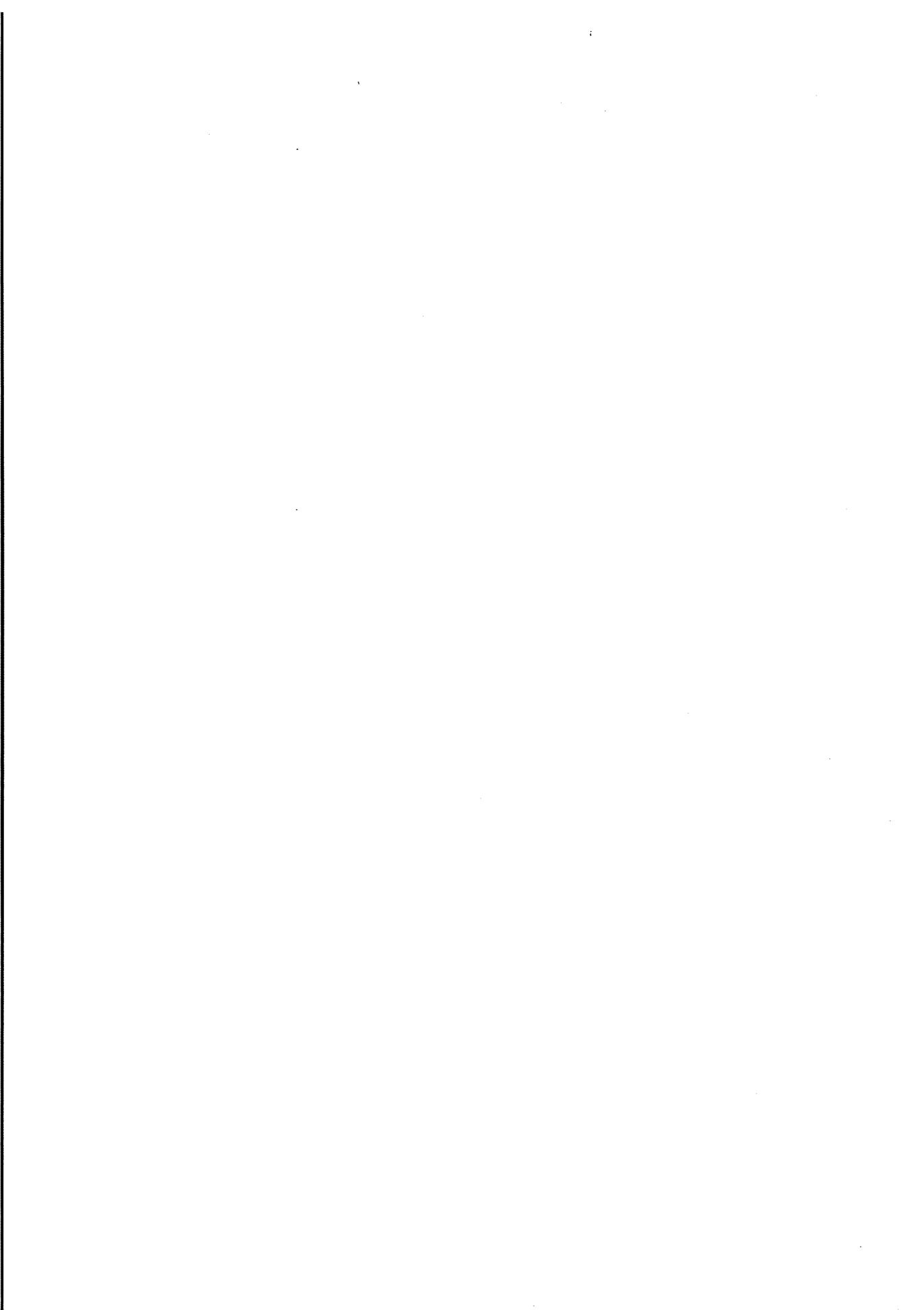
を考える。以下の間に答えよ。(配点30点)

- (1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ。
- (2) $(*)$ が整数を解にもつとする。このとき $(*)$ の解は共に正の
整数であり、また少なくとも1つの解は3以下であることを
示せ。
- (3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ。

4. 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ3次式で, 3次の係数は 1, 定数項は -3 とする. 方程式 $f(x) = 0$ は, 1 と虚数 α, β を解にもつとし, α の実部は 1 より大きく, α の虚部は正とする. 複素数平面上で $\alpha, \beta, 1$ が表す点を順に A, B, C とし, 原点を O とする. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

- (1) α の絶対値を求めよ.
- (2) θ を α の偏角とする. $\triangle ABC$ の面積 S を θ を用いて表せ.
- (3) S を最大にする θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ.









5. 座標空間において, Oを原点とし, A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(1, 1, 0)とする. $\triangle OAB$ を直線OCの周りに1回転してできる回転体をLとする. 以下の間に答えよ. (配点30点)

(1) 直線OC上にない点P(x, y, z)から直線OCにおろした垂線をPHとする. \overrightarrow{OH} と \overrightarrow{HP} を x, y, z の式で表せ.

(2) 点P(x, y, z)がLの点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \text{かつ} 0 \leqq x + y \leqq 2$$

であることを示せ.

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする. Lを平面 $x = a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ.

(4) 立体 $\{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in L, 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ.





