

平成 30 年度医学科入学試験問題

数 学

〔注意事項〕

- 1 監督者の指示があるまで、この冊子を開いてはいけない。
- 2 解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。
- 3 この問題冊子の本文は、4 ページからなっている。落丁、乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
- 4 この問題冊子の計算用紙と余白は、適宜下書きに使用してもよい。
- 5 解答は、すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。
- 6 この問題冊子は持ち帰ること。

1 a, b は実数とする。 xy 平面上で不等式 $y \leq e^x$ をみたす点 (x, y) の集合を D とし、直線 $y = ax + b$ を L とする。

(1) L が D に含まれるための a, b の条件を求め、その条件をみたす点 (a, b) の集合 E を ab 平面上に図示せよ。

(2) t は正の実数とし、 ab 平面上で連立不等式 $a \geq t, b \geq 0$ をみたす点 (a, b) の集合を F_t とする。(1) の E と F_t の共通部分の面積を $S(t)$ とするとき、 $\lim_{t \rightarrow +0} S(t)$ を求めよ。

必要なら $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ であることは用いてよい。

2 xy 平面上の原点 $(0, 0)$ に駒をおき、以下の操作を繰り返し、駒を xy 平面上で移動させる。

操作：サイコロを投げ、出た目を k ($1 \leq k \leq 6$) とする。

(i) k が奇数のとき、 x 軸方向に k だけ移動させる。

(ii) k が偶数のとき、 y 軸方向に $\frac{k}{2}$ だけ移動させる。

例えば駒が $(1, 1)$ にあるとき、3 の目が出れば $(4, 1)$ に、4 の目が出れば $(1, 3)$ に移動させる。

以下の問いに答えよ。ただし実数 x について、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) p, q は 0 以上の整数とする。点 (p, q) に到達させるために必要なサイコロを投げる最小の回数を $N(p, q)$ とおく。

$$\left[\frac{p}{5} \right] \leq N(p, 0) \leq \left[\frac{p}{5} \right] + 2, \quad \left[\frac{q}{3} \right] \leq N(0, q) \leq \left[\frac{q}{3} \right] + 1$$

であることを証明せよ。

(2) a, b は 0 以上の整数とする。ただし、 a, b の少なくとも一方は 0 でないとする。極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(an, bn)}{(a+b)n}$ を求めよ。ここで n を自然数とする。

(3) (2) の極限値を $R(a, b)$ とおく。 $R(a, b)$ の最大値と最小値を求めよ。

3 四面体 ABCD は $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AD = 1$, $BC = \frac{1}{2}$ であり, 辺 AD は面 ABC に垂直であり, 辺 BC は面 ACD に垂直であるとする。

- (1) 辺 BD の長さを求めよ。
- (2) 点 C から辺 AB に下ろした垂線の長さを求めよ。

次に四面体 ABCD から十分に離れたところに直線 AB と平行な平面 α を一つとる。 α に垂直な平行光線を四面体 ABCD にあてて, α 上に影をつくる。その影の面積を S とする。

- (3) 面 ABD が α に平行であるときの S を求めよ。
- (4) 直線 AB を軸として四面体 ABCD を 1 回転させるとき, S の最大値, 最小値を求めよ。

- 4 n は 2 以上の偶数とする。 n 個の式 $x - k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) の積を $f_n(x)$ とする。 すなわち

$$f_n(x) = x(x - 1)(x - 2)\cdots(x - n + 1)$$

である。

- (1) 関数 $y = f_n(x)$ のグラフは y 軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ。
- (2) x の方程式 $f_n(x) = n!$ はちょうど 2 つの実数解をもつことを証明し、その実数解を求めよ。
- (3) (2) の実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とするとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n + 1)!} \int_{\alpha}^{\beta} |f_n(x)| dx$$

を求めよ。

(計 算 用 紙)