B

平成30年度

前　期　日　程

数　学　問　題

〔注　意〕

1．問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること．

3．問題本文は，3 ページ，5 ページ，7 ページ，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子および表紙・白紙は持ち帰ること．

(下 書 き 用 紙)

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ の範囲で不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x) < \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) x が $x > 0$ の範囲を動くとき，

$$y = \frac{1}{\log(1 + x)} - \frac{1}{x}$$

のとりうる値の範囲を求めよ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{2}$ a, b を正の実数とし，$f(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1$ とする．

(1) c を実数とし，$f(x)$ が $x - c$ で割り切れるとする．このとき，$c > 0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)\left(x - \dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a \geqq 4$ が成り立つことを示せ．

(3) $a = 5$ とする．$f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x) = (x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$ 2 つの関数

$$f(t) = 2\sin t + \cos 2t, \qquad g(t) = 2\cos t + \sin 2t$$

を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: \ x = f(t), \quad y = g(t) \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．

(1) t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ．

(2) t_1, t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1) = f(t_2)$ を満たす実数とする．このとき，$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) C と直線 $x = 1$ が囲む領域の面積 S を求めよ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

4　座標空間に 6 点

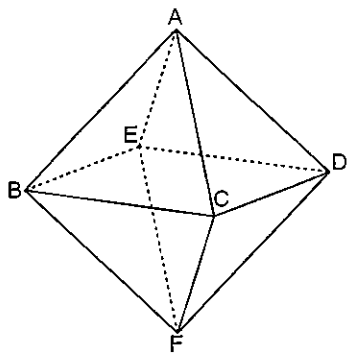
$$A(0,0,1),\ B(1,0,0),\ C(0,1,0),\ D(-1,0,0),\ E(0,-1,0),\ F(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体 ABCDEF がある．s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする．線分 AB，AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P，Q とし，線分 FD，FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R，S とする．

(1) 4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあることを示せ．

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする．s，t が $0<s<1$，$0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ．

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P，Q，R，S を通る平面による切り口の面積を X とする．線分 LM の長さが (2) の値 m をとるとき，X を最大とするような s，t の値と，そのときの X の値を求めよ．



（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

5 p，q を $0<p<1$，$0<q<1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする．2 つのチーム A，B が野球の試合を n 回行う．1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする．また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする．なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする．

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ とする．B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ．

（配点率 20 %）