前期日程用

平成30年度

数　学　問　題

（理学部・工学部・医学部医学科）

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．
2　問題冊子は全部で9ページである．脱落のあった場合には申し出ること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさずに解答すること．
3　解答用紙は全部で4枚である．各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右2か所）を忘れずに記入すること．
4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．
5　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．
6　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．
7　問題冊子は持ち帰ること．

（空　　白）

第 1 問 （50 点）

自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

とおくとき，次の問いに答えよ．

問 1　すべての自然数 n に対して $S_{2n} = T_n$ が成り立つことを示せ．

問 2　極限 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ を求めよ．

問 3　極限 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$ を求めよ．

（空　　白）

第 2 問 （50 点）

n を自然数とする．$0 \leqq a_k \leqq 1$ をみたす数列 $\{a_k\}$ に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

とおく．実数 x に対して

$$I_n(x) = b_n(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．

問 1　$a \geqq 0$ とする．$x \geqq 0$ に対して不等式 $1 - ax \leqq e^{-ax}$ が成り立つことを示せ．

問 2　不等式 $\displaystyle\int_0^1 I_n(x)\,dx \leqq 1$ を示せ．

問 3　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 1$ が成り立つとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 I_n(x)\,dx = 1$$

となることを示せ．

（空　　白）

第 3 問 （50 点）

次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

問 1　定積分

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^e (\log y)^2\ dy$$

の値を求めよ．

問 2　$f(x) = \tan x$ とする．関数 $y = f(x)$ は $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を持つ．定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx + \int_0^1 f^{-1}(y)\,dy \quad \text{および} \quad \int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$$

の値を求めよ．

問 3　定積分

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx + \int_1^e \sqrt{\log y}\,dy$$

の値を求めよ．

（空　　白）

第 4 問 (50 点)

n を 2 以上の自然数とし，原点 O を中心とする単位円周上に $2n+1$ 個の相異なる点

$$\mathrm{P}_k\left(\cos\frac{2\pi k}{2n+1}, \sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \quad (k=0,1,\ldots,2n)$$

を取る．また整数 j に対して，j を $2n+1$ で割った余りが $k=0,1,\ldots,2n$ のとき，$\mathrm{P}_j=\mathrm{P}_k$ と約束する．この記法の下で，

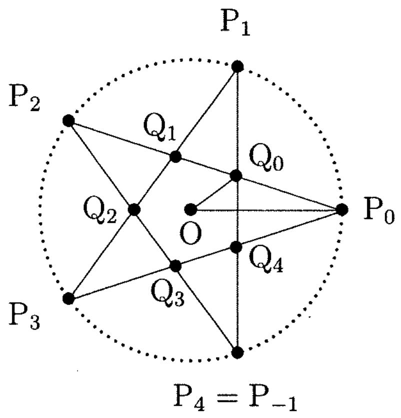
線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+n}$ と線分 $\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1-n}$ との交点を Q_k $(k=0,1,\ldots,2n)$

とおく．点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{P}_{2n}, \mathrm{Q}_{2n}, \mathrm{P}_0$ を順に結んでできる折れ線が囲む図形を K_n とし，その面積を A_n とする．このとき次の問いに答えよ．

問 1　$\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ および $\angle\mathrm{P_0OQ_0}$ の値を n を用いて表せ．

問 2　問 1 で求めた $\angle\mathrm{OP_0Q_0}$ の値を θ_n とおく．三角形 $\mathrm{OP_0Q_0}$ の面積を θ_n を用いて表せ．

問 3　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ．



$n = 2$ のとき