数　学

〔理学部（数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科）・医学部・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は表紙を除いて4ページである。
3. 問題は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{5}$ の5題ある。
4. 解答用紙は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{5}$ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
5. $\boxed{3}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
6. 「解答始め」の合図があったら，まず，黒板等に掲示又は板書してある問題冊子ページ数・解答用紙枚数・下書き用紙枚数が，自分に配付された数と合っているか確認し，もし数が合わない場合は手を高く挙げ申し出ること。次に，解答用紙をミシン目に沿って落ち着いて丁寧に別々に切り離し，学部名・受験番号・氏名を必ずすべての解答用紙の指定された箇所に記入してから，解答を始めること。最終ページは下書きに使用してかまわない。
7. 解答は，必ず所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，<u>裏面には決して記入しない</u>こと。
8. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 平面上で2点A(3, 1), B(1, 4)から等距離にある点全体のなす直線 l の方程式を求めよ。さらに，点P(2, 2)は，直線 l が分ける2つの領域のうち，点Aのある領域，点Bのある領域どちらに属するかを調べよ。

(2) 有限集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表すことにする。全体集合 U は有限集合で $n(U) = 100$ とし，A, B は U の部分集合で $n(A) = 30$, $n(B) = 80$ とする。$n(A \cap B)$ のとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3) 方程式 $5x + 8y = 139$ を満たす正の整数の組 (x, y) をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 実数 α, β に対して，整式

$$f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 - \beta^2 + 2)x^2 + 2\alpha x + 1$$

を考える。

(1) $y = x + \dfrac{1}{x}$ とおく。このとき $\dfrac{1}{x^2}f(x)$ を y の整式で表せ。

(2) $(\alpha, \beta) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ がちょうど1つの解をもつような (α, β) をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 次の $\boxed{3-1}$ $\boxed{3-2}$ $\boxed{3-3}$ から1題を選択して解答せよ。
解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

$\boxed{3-1}$ 実数 p に対して，数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = pa_n + 3n^2 + 3n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots(*)$$

を満たす。

(1) $p = 1$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) p が1でないとき，漸化式(＊)は実数 α，β，γ を用いて

$$a_{n+1} + \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma = p(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$$

とかき表せる。α，β，γ を p を用いて表せ。

(3) $p = 2$ のとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3-2}$ xyz 空間上に，点 A$(1,\ 0,\ 0)$，点 B$(-1,\ b,\ b)$，
球 $S : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$ がある。ただし，b は実数とする。原点を O とする。

(1) 直線 AB 上の点 P を，実数 t を用いて $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ と表すとき，点 P の座標を b，t を用いて表せ。

(2) 直線 AB が球 S と共有点をもつような b の値の範囲を求めよ。

(3) 球 S の中心を C とする。b が (2) の値の範囲を動くとき，三角形 ABC の面積 T の最大値と最小値を求めよ。

3 — 3　1から10までの数字が1つずつ書かれた10枚のカードがある。この中から1枚のカードを無作為に取り出し，書かれた数を記録してもとに戻す。この試行をn回行い，i回目に取り出したカードに書かれた数をX_iとする。さらに，それらのn個の数X_1，X_2，…，X_nを小さい順に並べかえたものを$X_{(1)} \leqq X_{(2)} \leqq \cdots \leqq X_{(n)}$とする。

(1)　確率$P(X_{(n)} \leqq 8)$を求めよ。

(2)　確率$P(X_{(n)} = 8)$を求めよ。

(3)　nを2以上とするとき，$X_{(2)}$が6以上となる確率が$\frac{1}{2}$未満となる最小の試行回数nを求めよ。

4 0でない複素数zに対して，$w=x+yi$を$w=z^2+\dfrac{\overline{z}}{z}$とする。ただし，$x$と$y$は実数，$i$は虚数単位とし，$\overline{z}$は$z$と共役な複素数とする。

(1) 0でない複素数zについて，zの絶対値をr，偏角をθとするとき，z，$\dfrac{1}{z}$，$\overline{z}$を，それぞれr，θを用いて極形式で表せ。

(2) 複素数平面上で点zが原点を中心とする半径1の円の周上を動くとき，点wが描く図形を求めよ。

(3) $r>1$とする。複素数平面上で点zが原点を中心とする半径rの円の周上を動くとき，点wが描く曲線Cの方程式をx，yを用いて表せ。

(4) $r>1$とする。(3)の曲線Cで囲まれた部分の面積をrを用いて表せ。

5 関数$f(x)=\log(1+x)\ (x\geqq 0)$を考える。$xy$平面上の$y=f(x)$のグラフを$y$軸のまわりで一回転させてできる形の容器がある。はじめ空である容器に，時刻tにおける水の量がvtになるように，単位時間あたりvの一定の割合で水を静かに注ぐ。ただし，vは正の定数とし，容器は回転軸(y軸)が水平面に垂直で，y軸の正の側を上向きにして固定されている。

(1) xy平面上で$y=f(x)$の増減と凹凸を調べてグラフをかけ。

(2) 水面の高さがhになったときの，容器内の水の量Vをhを用いて表せ。

(3) 水面の高さが$h=\log 2$になったときの，水面の高さの変化率$\dfrac{dh}{dt}$を求めよ。