前期日程用

2019年度

数　学　問　題

（理学部・工学部・医学部医学科）

注意事項

1　問題冊子は，監督者が「解答始め」の指示をするまで開かないこと．

2　問題冊子は全部で8ページである．脱落のあった場合には申し出ること．なお，解答用紙は上部で接着してあるので，はがさずに解答すること．

3　解答用紙は全部で4枚である．各ページ所定欄に，それぞれ氏名，受験学部，受験番号（最後のページは，左右2か所）を忘れずに記入すること．

4　解答は，すべて解答用紙の所定欄に記入すること．

5　解答用紙の裏面は計算等に使用してもよいが，採点はしない．

6　机上に各自の「受験票」と「大学入試センター試験受験票」を出しておくこと．

7　問題冊子は持ち帰ること．

（空　　白）

第 1 問 (50 点)

座標平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を C_t，C_t で囲まれた領域を D_t とする．$0 \leqq t \leqq 2$ に対し，D_0 と D_t の共通部分の面積を $S(t)$ とする．$0<t<2$ に対し，C_0 と C_t の交点のうち y 座標が正の方を P_t とする．座標平面の原点を O として，半直線 OP_t と x 軸の正の向きのなす角を θ で表す．次の問いに答えよ．

問 1　$0<t<2$ のとき，$S(t)$ の値を θ を用いて表せ．

問 2　$0<t<2$ のとき，t を θ を用いて表せ．

問 3　$\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ の値を求めよ．

（空　　白）

第 2 問 （50 点）

0 でない複素数 z に対して

$$w = z + \frac{1}{z}$$

とおく．i を虚数単位とし，z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とする．また，w の実部を u，w の虚部を v とする．次の問いに答えよ．

問 1　　u，v をそれぞれ r と θ を用いて表せ．

問 2　　点 z が条件 $|z+1| = |z-i|$ $(0 < \theta < \pi)$ を満たして複素数平面上を動くとき，u と v が満たす関係式を求め，点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ．また，$\lim_{r\to\infty} u$ と $\lim_{r\to 0} v$ を求めよ．

（空　　白）

第 3 問 （50 点）

k は実数とする．O を原点とする座標空間内に 3 点

$$A(1,\ 1,\ -1),\quad B(4k,\ -2k+2,\ -k+1),\quad C(4k+4,\ -2k,\ -k)$$

を考える．次の問いに答えよ．

問 1　大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものをすべて求めよ．

問 2　$0 < s < 1$，$0 < t < 1$ とし，線分 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を k，s，t を用いて表せ．

問 3　問 2 の内分点 P と Q で，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の両方に垂直であるものが存在するとき，P と Q の座標を求めよ．また，そのような P と Q が存在するための k の条件を求めよ．

問 4　k は問 3 で求めた範囲にあるとする．問 3 の P，Q と線分 PQ 上の点 X に対し $\triangle$XOA と $\triangle$XBC の面積が一致するとき，その面積を求めよ．

（空　　白）

第 4 問 （50 点）

自然数 n, s $(s < n)$ に対して

$$I_n(s) = \int_0^1 x^{n-s}(1-x)^s \, dx$$

とおく．次の問いに答えよ．

問 1　$s < n-1$ のとき，等式

$$I_n(s) = \frac{n-s}{s+1} I_n(s+1)$$

が成り立つことを示せ．

問 2　$I_n(s)$ を n と s を用いて表せ．

問 3　自然数 n, s $(s < n)$ に対して，等式

$$\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{n+1}{n-s+k+1} {}_s\mathrm{C}_k$$

が成り立つことを示せ．ただし，${}_s\mathrm{C}_0 = {}_s\mathrm{C}_s = 1$ とする．