平成29年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，４ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　n は正の整数とする．点 $(n, 0)$ を通り，曲線 $C : y = e^{-x}$ に接する直線を L_n とし，その接点を P_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　P_n の座標を求めよ．

問 2　L_n と L_{n+1} の交点を Q_n とする．Q_n の座標を求めよ．

問 3　2 直線 L_n，L_{n+1} および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_n とおくとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ．

問題 2　a, b, c を実数とする．3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の3つの解を α, β, γ とする．これらの解は次の4つの条件を満たす．

(i)　$\gamma=-\dfrac{1}{2}$

(ii)　$|\alpha|=|\beta|=1$

(iii)　α の虚部は正である

(iv)　複素数平面上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ は同一直線 L 上にある

このとき，次の問いに答えよ．

問 1　a, b, c および α, β の値を求めよ．

問 2　点 $\mathrm{P}(z)$ が直線 L 上を動くとき，$w_1=\dfrac{1+4z}{2z}$ で表される点 $\mathrm{Q}(w_1)$ の軌跡を複素数平面上に図示せよ．

問 3　動点 $\mathrm{R}(w_2)$ は，$\arg\left(\dfrac{\beta-w_2}{\alpha-w_2}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ を満たす．

このとき，$\mathrm{R}(w_2)$ の軌跡を複素数平面上に図示するとともに，問2で求めた $\mathrm{Q}(w_1)$ との距離 $|w_1-w_2|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

問題 3　Oを原点とする座標平面上に長さ1の線分ABがある．線分ABの端点Aはx軸上の$x \geqq 0$の部分を，端点Bはy軸上の$y \geqq 0$の部分を動くものとする．このとき，次の問いに答えよ．

問 1　線分ABがx軸となす角$\angle \mathrm{OAB}$がθであるとき，直線ABをL_θで表す．直線L_θの方程式を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$である．

問 2　tは$0 < t \leqq 1$を満たす定数とする．直線$x = t$と直線L_θとの交点をP_θとする．点P_θのy座標が最大となるθをαとするとき，$\cos\alpha$をtを用いて表せ．

問 3　点P_αの直交座標(x, y)をαを用いて表せ．また$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$のとき，点P_αの極座標を求めよ．

問 4　αが$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，点$\mathrm{P}_\alpha$の描く曲線を$C$とする．$C$上の点$\mathrm{P}_\alpha$における接線が$L_\alpha$であることを示し，$C$の概形を図示せよ．

問題 4　ある駐車場には4つの駐車枠 A，B，C，D が，アルファベット順に1列に並んでいる．そして自動車は，4台が順に入場して，空いている枠に次の確率で駐車する．

(i)　BとCのうち先着の自動車が隣の枠に駐車している枠，およびDには，等しい確率で駐車する．

(ii)　Aに駐車する確率，およびBとCのうち両隣が空いている枠に駐車する確率は，(i)の確率の3倍である．

このとき，次の確率を求めよ．ただし，1台目の自動車が入場するときには，4つの枠はすべて空いている．

問 1　1台目の自動車がAに駐車する確率

問 2　3台目の自動車が入場したとき，BとDに自動車が駐車している確率

問 3　4台目の自動車が入場したとき，Cに自動車が駐車していない確率