平成29年度
一般入学試験問題
数学（60分）

I 注意事項

1　**配布された問題冊子・解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないでください。**

2　この問題冊子は６ページあります。（ページ番号のないページは含みません。）
試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。

3　ページの脱落や重複、印刷の不鮮明な箇所があった場合には、直ちに監督者に申し出てください。

4　受験番号および解答は必ず解答用紙の所定の欄に記入・マークしてください。

5　この問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。

6　質問、中途退室など用件のある場合は、手を挙げて申し出てください。

7　退室時は、問題冊子は閉じ、解答用紙は裏返しにしてください。

8　試験に関わるすべての用紙は、持ち帰ることはできません。

II 解答上の注意

1　「**解答上の注意**」が、裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。

解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\text{アイ}}$ ， $\boxed{\text{ウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字（0～9）が入ります。

それらを解答用紙の**ア**，**イ**…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例　$\boxed{\text{アイ}}$ に 83 と答えたいとき

ア	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ● ⑨
イ	⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

3　分数形で解答する場合，**既約分数**で答えなさい。

4　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

第1問　次の問い（問1～3）に答えよ。

問1　1以上の整数 n に対して定義される a_n について $a_1 = 1$ とし、xy 平面における曲線 $y = x^3$ 上の点 $\mathrm{A}_n(a_n,\ a_n{}^3)$ における接線を L_n とする。直線 L_n と x 軸の交点を $\mathrm{B}_{n+1}(a_{n+1},\ 0)$ とすると、$a_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a_n$ が成り立つ。また、曲線 $y = x^3$ と線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n+1}$ および x 軸によって囲まれる部分の面積を S_n とすると、$S_1 = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$、$\displaystyle\sum_{n=1}^{x} S_n = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$ である。

問2　$z \neq -\dfrac{1}{2}$ である複素数 z に対して、$w = \dfrac{3z+1}{2z+1}$ と定める。このとき、z は w を用いて $z = \dfrac{-w + \boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}\,w - \boxed{\text{ス}}}$ と表される。z が純虚数であるとき、複素数平面において w の満たす点全体は、中心が $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$、半径 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ の円から2点 $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$、$\boxed{\text{ト}}$ を除いたものである。

問3　さいころ1個を3回投げて、出た目を順に x_1、x_2、x_3 とする。$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ が4の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。また、$x_1 + (x_2)^2 + (x_3)^3$ が4の倍数となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。なお、さいころの6個の目について、どの目の出る確率も等しいものとする。

第２問 四面体OABCは辺の長さがOA = 8、OB = 9、OC = 10であり、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$、$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$、$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$とおくと、内積の値はそれぞれ$\vec{a}\cdot\vec{b} = 64$、$\vec{b}\cdot\vec{c} = 82$、$\vec{c}\cdot\vec{a} = 64$を満たす。

また、3点A、B、Cを通る平面と点Dで接し、辺OA、OB、OCとそれぞれ点P、Q、Rで接する球をSとし、Sの中心をEとする。このとき、次の問い（問１～４）に答えよ。

問１ 辺の長さは$AB = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$、$AC = \boxed{\text{ウ}}$である。また、四面体OABCの体積は$\boxed{\text{エオ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$である。

問２ $\vec{x}$は$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$のそれぞれとなす角がともにθ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$であり、$|\vec{x}| = 1$である。このとき、実数$p$、$q$、$r$を用いて$\vec{x} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$とおくと、$\dfrac{p}{\cos\theta} = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$、$\dfrac{p}{r} = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$である。

問３ Sの半径は$\boxed{\text{シ}}$であり、$\overrightarrow{OE} = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\vec{c}$と表される。

問４ $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\vec{b}$である。また、四面体OABCの体積を$V_1$、四面体OPQRの体積を$V_2$とすると、$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$である。

第3問　xy 平面において

$$\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

によって表される曲線をCとする。このとき、次の問い（**問1～4**）に答えよ。

問1　C上の点をP(x, y) とする。x座標が最大であるときのy座標は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また、Cとx軸の共有点のうち原点ではないものを点Qとすると、Qは $\theta = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ に対応する点であり、Qにおける曲線Cの接線の方程式は $y = \boxed{\text{オ}}\,x - \dfrac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

問2　$y^2 = \dfrac{\boxed{\text{ケ}} - \cos\boxed{\text{コ}}\,\theta}{\boxed{\text{サ}}}$、

$$y^2\frac{dx}{d\theta} = \cos\boxed{\text{シ}}\,\theta - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\cos\boxed{\text{ソ}}\,\theta + \cos\boxed{\text{タ}}\,\theta\right)$$

である。ただし、$\boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}}$ とする。

問3　Cと直線$y = x$の共有点で原点でないものを点A(α, α) とすると、Aは $\theta = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$ に対応するC上の点であり、この値をθ_0とおくと

$$\cos\theta_0 = \frac{\boxed{\text{テ}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる。また、

$$\alpha^2 = \frac{\boxed{\text{ニ}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

となる。

問4　Cと直線$y = x$で囲まれる部分をx軸の周りに回転して得られる立体の体積をVとする。αを**問3**の値とすると、

$$\frac{V}{\alpha} = \frac{\boxed{\text{ノハ}} - \boxed{\text{ヒ}}\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}\pi$$となる。