平成30年度一般入試前期日程

数 学 問 題 紙

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはいけません。
2. 数学の問題紙は，４ページあります。
3. 解答用紙は４枚，草案紙は１枚あります。
4. 受験番号は，監督者の指示に従って，全ての解答用紙の指定された箇所に必ず記入しなさい。
5. 受験番号および解答以外のことを解答用紙に書いてはいけません。
6. 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
7. 解答用紙のみを提出しなさい。問題紙，草案紙は持ち帰りなさい。

問題 1　ある臓器にできる腫瘍（しゅよう）X は悪性と良性の 2 つの型に分けられ，同時に両方の型であることはない．実際に X がある人とない人の割合は 3 % と 97 % であり，X がある人のうち，悪性の人と良性の人の割合は 1 : 2 である．そして，腫瘍 X があるかないかを調べる検査 Y について，次の事が知られている．

(i)　悪性の X がある人に Y が用いられると，95 % の確率で X があると判定される．

(ii)　良性の X がある人に Y が用いられると，80 % の確率で X があると判定される．

(iii)　X がない人に Y が用いられると，90 % の確率で X がないと正しく判定される．

ある人が，この検査 Y を受けることになった．このとき，次の確率を求めよ．

問 1　この人に X があると判定される確率

問 2　X があると判定されたとき，悪性の X が実際にある確率

問 3　悪性の X が実際にないとき，X がないと判定される確率

問題 2　n を正の整数とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sin x \sin^2 nx$ とおく．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　曲線 $y=g(x)$ と x 軸が囲む部分の面積を求めよ．

問 2　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点のうち，共通の接線をもつすべての点の座標を求めよ．

問 3　問 2 で求めたすべての接点の y 座標の値の平均を A_n とおくとき，$\lim_{n \to \infty} A_n$ を求めよ．

問題 3　a は実数で $a>1$ とし，曲線 $y=\log x$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\,(a, \log a)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a}, \log\dfrac{1}{a}\right)$ をとる．直線 AB と曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積を S とし，直線 AB，x 軸，直線 $x=\dfrac{1}{a}$ および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を T とする．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　S，T を a を用いて表せ．

問 2　次の極限値を求めよ．ただし，(3) において必要であれば

$$x>0 \text{ のとき，} \log(1+x) < x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(1) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S}{T}$　　(2) $\displaystyle\lim_{a\to 1+0}\frac{T}{(a-1)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 1+0}\frac{S}{(a-1)^2}$　　(4) $\displaystyle\lim_{a\to 1+0}\frac{S}{T}$

問 3　$a>1$ の範囲で，$\dfrac{S}{T}$ は単調に増加することを示せ．

問 4　$S=T$ となる a が $e^{\frac{3}{2}}<a<e^2$ の範囲に唯 1 つあることを示せ．ただし，e は自然対数の底で $e=2.7182\cdots$ である．

問題 4　$\triangle$ABC において，AB $= 2$，BC $= 3$，CA $= \sqrt{7}$ とする．AB に関して C と反対側に点 S を $\triangle$ASB が正三角形となるようにとる．また，BC に関して A と反対側に点 T を $\triangle$BTC が正三角形となるようにとる．さらに $\triangle$ASB の外接円と $\triangle$BTC の外接円との交点のうち，B と異なる点を P とする．このとき，次の各問いに答えよ．

問 1　$\angle$ABC の大きさを求めよ．

問 2　$\triangle$PAB $\backsim$ $\triangle$PBC であることを示し，AP，BP，CP の長さをそれぞれ求めよ．

問 3　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．