平成31年度　入学者選抜学力検査問題

数　　学（理系β）

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で4題あります。また，解答用紙は4枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に2箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 指定された番号以外の解答用紙に解答を記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を記入した場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点50点は200点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔1〕 (配点 50) 次の問いに答えなさい。ただし，対数は自然対数とする。

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $x > \log(1+x)$ が成り立つことを示しなさい。

(2) 関数 $f(x)$ は，$x \geqq 0$ で定義された連続関数で，$f(0) = 0$ を満たし，$x > 0$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする。$x > 0$ で常に $f''(x) < 0$ ならば，関数 $\dfrac{f(x)}{x}$ は $x > 0$ で減少することを示しなさい。

(3) $0 < a < b < 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{a}{b} < \frac{\log(1+a)}{\log(1+b)} < \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{a}{b}$$

〔2〕 (配点 50) 三角形の 3 頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わる。その点を三角形の垂心という。

△ABC の外心を O，垂心を H とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，△ABC は直角三角形ではないとする。

(1) 直線 OB と△ABC の外接円との交点で B でない点を D とする。四角形 AHCD は平行四辺形であることを示しなさい。

(2) 辺 BC の中点を M とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ が成り立つことを示しなさい。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が成り立つことを示しなさい。

〔 3 〕 (配点 50) 実数 x に対して，$3n \leqq x < 3n+3$ を満たす整数 n により，

$$f(x) = \begin{cases} |3n+1-x| & (3n \leqq x < 3n+2 \text{ のとき}) \\ 1 & (3n+2 \leqq x < 3n+3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする。関数 $f(x)$ について，次の問いに答えなさい。ただし，e は自然対数の底とする。

(1) $0 \leqq x \leqq 7$ のとき，$y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2) 0 以上の整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_{3n}^{3n+3} f(x)e^{-x}\,dx$ とする。I_n を求めなさい。

(3) 自然数 n に対して，$J_n = \displaystyle\int_{0}^{3n} f(x)e^{-x}\,dx$ とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n$ を求めなさい。

〔４〕（配点 50） 次の問いに答えなさい。

(1) p, q, r を実数とする。$p-q=r$ ならば，$|p|$ と $|q|$ のうち少なくとも一方は $\dfrac{|r|}{2}$ 以上であることを示しなさい。

(2) a, k は実数で，$a>0$, $k \geqq 0$ とする。関数 $f(x)=ax^2$ の $k-5 \leqq x \leqq k-3$ における最大値を L, 最小値を S とする。このとき，不等式 $L-S \geqq a$ が成り立つことを示しなさい。

(3) a, b, c は実数で，$a>0$, $b \geqq 0$ とする。関数 $g(x)=|ax^2+bx+c|$ の $-5 \leqq x \leqq -3$ における最大値を M とする。このとき，不等式 $M \geqq \dfrac{a}{2}$ が成り立つことを示しなさい。