

平成 25 年度学力検査問題

医学部・前期日程

数 学

② $\left(\begin{array}{l} \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \\ \text{数} \end{array} \begin{array}{l} \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \\ \text{学} \end{array} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \right)$

問 題	ページ	ページ
	1	2
解答用紙枚数	2 枚	
解 答 時 間	1 2 0 分	

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙 2 枚の指定された欄 2 箇所(計 4 箇所)に、忘れずに本学の受験番号を記入すること。
4. 解答は、すべて別紙解答用紙のそれぞれの解答欄に記入すること。
5. 配布された問題冊子は、試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は、草稿用紙として使用してよい。

1 平面上のベクトル \vec{a} , \vec{b} が $|\vec{a}+2\vec{b}|=2$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たすように動く。ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$ を、それぞれ \vec{x} , \vec{y} とし、 \vec{x} と \vec{y} がなす角を θ とする。以下の問いに答えよ。

(1) \vec{a} , \vec{b} を \vec{x} , \vec{y} で表せ。

(2) $\vec{a}+\vec{b}$ を \vec{x} , \vec{y} を用いて表し、 $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ を θ で表せ。

(3) $|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ を、それぞれ求めよ。

2 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ となる実数とし、平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$, $Q(\cos 3\theta, -\sin 3\theta)$ をとる。さらに線分 PQ と x 軸との交点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 加法定理を用いて $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ だけで表す式を導け。同様に $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ だけで表す式を導け。

(2) $PR:RQ=5:11$ のとき、 $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) (2) の条件下で $\triangle POR$ の面積を求めよ。

3 正四面体 ABCD を考える。点 P は、時刻 0 では頂点 A にあり、1 秒ごとに、今いる頂点から他の 3 頂点のいずれかに、等しい確率で動くとする。n を 0 以上の整数とし、点 P が n 秒後に A, B, C, D にある確率を、それぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 1$ に対し $q_n = r_n = s_n$ となることを数学的帰納法で証明せよ。
- (2) $n \geq 1$ に対し p_n, q_n を p_{n-1}, q_{n-1} で表せ。ただし、 $p_0 = 1, q_0 = 0$ とする。
- (3) $c_n = p_n - q_n$ とおいて c_n の一般項を求めよ。
- (4) p_n の一般項を求めよ。

4 e で自然対数の底を表す。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + e})$$

で定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ を微分せよ。また $f'(x)$ が偶関数であることを示せ。
- (2) 定積分

$$\int_{-1}^1 f(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

を求めよ。

- (3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_{-1}^1 x^{2n} f(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。n を 2 以上とするとき、 a_n と a_{n-1} の間に成り立つ関係式を求めよ。