平成 29 年度　入学試験問題(前期日程)

数　　学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間　120 分

理工学部：数学物理学科・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子　　**問題……** $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$　　**ページ……** 1 ～ 2
解答用紙…… 4 枚
下書用紙…… 1 枚

配　　点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の 0.75 倍とする。

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 曲線 $C : x^2 + 3y^2 = 4$ と，その上の点 $\mathrm{P}(1, 1)$ を考える。実数 m に対して，P を通る傾き m の直線を l_m とし，l_m と C との交点で，P と異なるものを $\mathrm{Q}_m(a_m, b_m)$ とおく。ただし，l_m が C と接する場合には，$\mathrm{Q}_m = \mathrm{P}$ と決めることにする。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) 曲線 C の P における接線の方程式を求めよ。

(2) Q_m の座標 (a_m, b_m) を m を用いて表せ。

(3) m が有理数のとき，a_m，b_m はともに有理数であることを示せ。

(4) a_m，b_m がともに有理数のとき，m は有理数であることを示せ。

2 一般項が $a_n = \sqrt{4^n + 2^{n+1} + 29}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の第 n 項 a_n の値を越えない最大の整数を $[a_n]$ と表す。また，$\langle a_n \rangle = a_n - [a_n]$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $[a_1]$，$[a_2]$，および $[a_3]$ のそれぞれの値を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ を満たすすべての整数 n に対して，$[a_n] = 2^n + 1$ であることを示せ。

(3) 極限値 $\lim_{n \to \infty} \langle a_n \rangle$ を求めよ。

(4) $\langle a_n \rangle \leqq \dfrac{1}{8}$ を満たす 4 以上の整数 n をすべて求めよ。

3 n は正の整数とする。1 から n までの異なる n 個の整数の順列を考える。以下そのような順列に対して，直前の数よりも小さい数が並ぶ回数を「下降回数」と呼ぶ。例えば，$n=4$ のとき，1432 では 4 の次に 3，3 の次に 2 が並んでいるので下降回数は 2 である。同様にして 1234，1324，4321 の下降回数はそれぞれ 0，1，3 である。下降回数が 1 である順列の総数を a_n，下降回数が 2 である順列の総数を b_n とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) a_4 を求めよ。

(2) $a_n=\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k-1)$ であることを示せ。

(3) a_n を求めよ。

(4) $n \geqq 2$ のとき，$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k a_{n-k}-\sum_{m=1}^{n-1}(m-1)({}_n\mathrm{C}_m-1)$ であることを示せ。

4 すべての実数 x に対して $f(x)=|\sin(\pi x)|$ で定義される関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 定積分 $\int_0^1 e^{-x}f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対し，$I_n=\int_0^n e^{-x}f(x)\,dx$ とおく。このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ。