

# 数学問題紙

平成 29 年 2 月 25 日

自 11 : 00

至 12 : 40

## 答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

# 問題訂正

## 「数学」

3 ページ 2 (2)

上から 1 行目

下線部を追加

(誤)

.....どのくらいの大きさなのかを調べたい.  $|z_n - 10^p|$  の値が.....

(正)

.....どのくらいの大きさなのかを調べたい.  $n=m_1$  のとき  $|z_n - 10^p|$  の値が.....

1 次の各問に答えよ.

(1) 座標空間において,  $xy$  平面上に原点を中心とする半径 1 の円に内接する正六角形 ABCDEF がある. 六角錐 P-ABCDEF において, 頂点 P の座標を  $P(0, 0, a)$  ( $a > 0$ ) とする.  $\angle APB = 45^\circ$  であるとき,  $a$  の値と, 六角錐 P-ABCDEF の体積をそれぞれ求めよ.

(2)  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とする.

(i) 不等式  $\int_1^{2^{n+1}} \frac{1}{x} dx < 2a_n$  が成り立つことを示せ.

(ii) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\log n}$  を求めよ.

(3) 5進法で表された 2 つの数  $123_{(5)}$  と  $24_{(5)}$  の積を 5進法で表せ.

**2**  $i$  を虚数単位とし、 $\alpha$  と  $\beta$  を複素数で  $\alpha \neq 0$ 、 $\beta = 1 + ti$  ( $t > 0$ ) とする。このとき、数列  $\{z_n\}$  を次で定義する。

$$z_1 = \alpha,$$

$$z_{n+1} = \beta z_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

以下の各問に答えよ。

(1) 複素数平面において原点を  $O$  とし、 $z_n$  を表す点を  $P_n$  とする。三角形  $OP_n P_{n+1}$  の面積を  $a, t, n$  を用いて表せ。

$\alpha = -1 + \sqrt{3}i$ 、 $t = \tan \frac{5}{12}\pi$  とする。 $z_n$  が正の実数となる番号  $n$  を小さいほうから順に  $m_1, m_2, m_3, \dots$  とする。

(2)  $n = m_1$  のとき  $z_n$  がどのくらいの大きさなのかを調べたい。 $|z_n - 10^p|$  の値が最小となる自然数  $p$  を求めよ。

(3) 数列  $\{m_k\}$  の一般項を  $k$  を用いて表せ。

**3** 3gのおもり1個が片方の皿にのっているてんびんと、無数に用意された1g, 2g, 3gのおもりがある。以下の2つのルールに基づいて、てんびんの皿におもりを1個ずつのせる試行を行う。

1. てんびんがつり合っていないときには、総重量が軽い方の皿に1g, 2g, 3gのおもりを無作為に1個選んでのせる。それぞれのおもりが選ばれる確率は  $0 < a < 1$  として  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{a}{2}$ ,  $1 - a$  である。
2. てんびんがつり合った時点で試行をやめる。

$n$  回目の試行の結果、てんびんがつり合っていない確率を  $p_n$ 、てんびんがつり合って試行が終了する確率を  $q_n$  とするとき、以下の各問に答えよ。

(1)  $p_1$  と  $p_2$  をそれぞれ  $a$  を用いて表せ。

(2)  $p_n$  の一般項を  $a$  と  $n$  を用いて表せ。

(3)  $q_n$  の一般項を  $a$  と  $n$  を用いて表せ。

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} nq_n$  を求めよ。

4  $x > 0$  に対して、連続関数  $f(x)$  は、等式

$$f(x) = 2 \log x - \int_1^e tf(t) dt$$

をみたすものとする。また、曲線  $y = f(x)$  の接線のうち、原点を通るものを  $l$  とし接点を  $(u, v)$  とする。以下の各問に答えよ。

- (1)  $f(x)$  を求めよ。
- (2) 接点  $(u, v)$  を求めよ。
- (3) 曲線  $y = f(x)$ 、直線  $l$  および  $x$  軸で囲まれる領域を、 $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。