

平成 30 年 度

数 学

注意事項

1. 問題は 4 題で、すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙 4 枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は、表面の右下に「裏面に続く」と記入し、表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて、ていねいに描きなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して、論述式の答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は、下書きやミスがないかどうか見直すのに十分活用しなさい。

1 自然数 n に対して $I_n = \int \frac{1}{\cos^n x} dx$ とするとき、以下の問いに答えよ.

(1) 不定積分 I_2 を求めよ.

(2) 不定積分 I_4 を求めよ.

(3) 不定積分 I_3 を求めよ.

2

自然数 k, n が $k \leq n$ を満たすとき、以下の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq {}_n C_k$$

を証明せよ。

(2) すべての実数 t に対して、 $1 + t \leq e^t$ を証明せよ。

(3) 0 以上のすべての実数 t に対して、

$${}_n C_k t^k \leq e^{nt}$$

を証明せよ。

(4) 不等式

$${}_n C_k \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

を証明せよ。

(5) $n = 10^{23}$, $k = 10^2$ のとき、 ${}_n C_k$ の桁数の下 2 桁を切り捨てた値を求めよ。

3 $\triangle ABC$ の各頂点 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c , 重心を G , 内心を I とする. 以下の問いに答えよ.

(1)

$$\vec{IG} = \left(\frac{1}{3} - \frac{b}{a+b+c} \right) \vec{AB} + \left(\frac{1}{3} - \frac{c}{a+b+c} \right) \vec{AC}$$

を証明せよ.

(2) $\vec{IG} = \vec{0}$ は, $\triangle ABC$ が正三角形であるための必要十分条件であることを証明せよ.

(3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとき, 次の条件 p, q は同値であることを証明せよ.

p : 順番を適当に入れ替えれば, a, b, c は等差数列をなす.

q : 線分 IG と平行な辺が存在する.

4 定数 a, b, c を用いて, 数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = a^n + b^n + c^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める.

(1) 恒等式

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

を用いて $S_{n+3}, S_{n+2}, S_{n+1}, S_n$ が満たす漸化式を求めよ.

(2) $a + b + c = 0, abc \neq 0$ のとき,

$$\frac{S_2 S_3}{S_5}, \frac{(S_2)^2 S_3}{S_7}, \frac{S_2 S_5}{S_7}$$

のそれぞれの値を求めよ.

(3) (2)で求めた 3 つの値に共通してあてはまる規則を 1 つ挙げよ.

