

入学試験問題(1次)

数 学

平成30年1月22日

9時00分—10時20分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
- 2 この問題冊子は表紙・白紙を除き9ページである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出ること。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- 4 解答は、各設問ごとに一つだけ選び、解答用紙の所定の解答欄の該当する記号を塗りつぶすこと。
- 5 解答を訂正する場合は、消しゴムできれいに消すこと。
- 6 監督員の指示に従って、問題冊子の表紙の指定欄に受験番号を記入し、解答用紙の指定欄に受験番号、受験番号のマーク、氏名を記入すること。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

| | | | | |
|------|--|--|--|--|
| 受験番号 | | | | |
|------|--|--|--|--|

上の枠内に受験番号を記入しなさい。

設問ごとに、与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つだけ選び、解答用紙の該当する記号を塗り潰せ。

1 整式 $x^4 - 4x + a$ が整式 $x^2 - 2bx + b^2$ で割り切れるとき、 $a + b$ の値を求めよ。ただし、 a, b は実数とする。

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ア 0 | カ 1 | サ 2 | タ 3 | ナ 4 |
| ハ 5 | マ 6 | ヤ 7 | ラ 8 | ワ 9 |

2 実数 x, y は、 $29^x = 49$, $1421^y = 2401$ を満たす。

$\frac{2x - y}{xy}$ の値を求めよ。

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ア 0 | カ 1 | サ 2 | タ 3 | ナ 4 |
| ハ 5 | マ 6 | ヤ 7 | ラ 8 | ワ 9 |

3 自然数 7^{2018} の一の位の値を求めよ。

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| ア 0 | カ 1 | サ 2 | タ 3 | ナ 4 |
| ハ 5 | マ 6 | ヤ 7 | ラ 8 | ワ 9 |

4 実数 x, y について, $\log_x y + 3 \log_y x = 4$, $\log_x(x^2 + 4y) = 3$ がともに成立しているとき, $y - x$ の値を求めよ。ただし, $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$ とする。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

5 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ であるとき, $2 \sin^3 \theta + 2 \cos^3 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

6 $\sin 3\theta - \sin \theta = \cos 3\theta + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を満たす θ の総和を a とする。
 $\frac{2a}{\pi}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

7 不等式 $a \sin^2 x + 6 \sin x + 1 \geq 0$ (a は実数) が常に成立するとする。
 a の最小値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

8 $x^2 + 7xy + 12y^2 + x + 3y = 9$ を満たす整数の組 (x, y) はいくつあるか。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

9 $\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} - i}\right)^8 = a + bi$ (a, b は実数, $i^2 = -1$) となるとき,
 $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

10 方程式 $x^3 + x^2 - x + a = 0$ (a は実数) が虚数解

$\cos \theta + i \sin \theta$ ($i^2 = -1$) ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) をもつとき, a の値を求めよ。

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

11 円 $C: x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$ と直線 $l: y = ax - a + 1$ について考える。

直線 l は円 C に接するとする。 $|4a|$ の値を求めよ。ただし, a は実数とする。

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

12 点 O を中心とする半径 4 の円を C とする。円 C の外部の点 P を通る直線が円 C と異なる 2 つの点 A, B (弦 AB は円 C の中心 O を通らないとする) で交わることをする。 $PA \cdot PB = 9$ となるとき, $|OP^2 - 16|$ の値を求めよ。

- | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | 0 | カ | 1 | サ | 2 | タ | 3 | チ | 4 |
| ハ | 5 | マ | 6 | ヤ | 7 | ラ | 8 | ワ | 9 |

- 13 実数 x, y は2つの不等式 $(x-5)^2 + 2y^2 \leq 25$, $(x-12)^2 + y^2 \leq 48$ を満たすものとする。 $y-x$ の最大値を M としたとき、

$\frac{(M+6)^2}{3}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 14 1辺の長さが a の正三角形 $P_1Q_1R_1$ について考える。 $\triangle P_1Q_1R_1$ の内接円を C_1 とし、 $\triangle P_1Q_1R_1$ と円 C_1 の接点を P_2, Q_2, R_2 とする。 $\triangle P_2Q_2R_2$ の内接円を C_2 と表記する。この操作を繰り返すことで $\triangle P_nQ_nR_n$ (n は自然数) を作り、 $\triangle P_nQ_nR_n$ の内接円を C_n とする。円 C_n の面積を S_n とするとき、 $\frac{36}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 15 $\triangle ABC$ の内部の点 P について、 $4\vec{PA} + 5\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$ が成立しているとする。 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ の面積をそれぞれ、 S_1, S_2, S_3 としたとき、 $S_1 : S_2 : S_3 = 3 : a : b$ となる。 $a + b - 7$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

16 4つの点, $A(0, -5, 0)$, $B(3, 1, 3)$, $C(3, 4, 7)$, $D(10, -3, a-3)$ が同一平面上にあるとき, $|a+4|$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

17 数列 $\{x_n\}$ が, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{3x_n + 2}{x_n + 2}$ の条件を満たすとき,

数列 $\{x_n\}$ の一般項は, $x_n = \frac{4^n - b}{2 \cdot 4^{n-1} + a}$ (a, b は実数) となる。

$\frac{b}{a}$ の値を求めよ。必要があれば, $\frac{x_n - 2}{x_n + 1} = y_n$ の式を用いなさい。
ただし, n は自然数とする。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

18 数列 $\{a_n\}$ について, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする。

$S_n = n^3 - 41n^2$ であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の最小値を m とする。

$\left| \frac{m}{70} \right|$ の値を求めよ。ただし, n は自然数とする。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

19 1個のさいころを4回続けて投げたとき、出た目を順に a, b, c, d とする。

$a + b + 2c + 2d \leq 10$ となる確率を p とするとき、 $216p$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

20 1000 から 9999 までの4桁の整数が表記されたカードのなかから1枚のカードを無作為に選ぶこととする。選んだカードの整数において、同じ数字が2つ以上現れる(例えば、1123, 5333 など)確率を p としたとき、 $\frac{125}{31}p$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

21 2つの曲線 $C1: y = x^3 - x^2 - 12x - 1$, $C2: y = -x^3 + 2x^2 + a$

(a は自然数)について考える。曲線 $C1$ と $C2$ が接するとき、 a の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

22 x が0以上の実数であるとき、

関数 $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 34}{x^2 - x + 3}$ の最小値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

23 曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ (x は実数, $x > 0$)について考える。

点 $P(k, k)$ (k は実数, $k > 0$)から、曲線 C 上に存在する異なる2つの点 Q, R に対し引いた直線は、どちらも曲線 C と接するものとする。 $\angle QPR = \frac{2}{3}\pi$ となるとき、 $6k^2$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 24 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + x$ (x は実数) について考える。曲線 C 上を動く点を $P(a, b)$ (a, b は実数, $0 < a < 1$) とする。原点 O と P を結ぶ線分と曲線 C とで囲まれる部分の面積を S , 線分 OP の長さを L としたとき,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{48\sqrt{2}S}{L^3} \text{ の値を求めよ。}$$

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 八 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

- 25 曲線 $C: y = -x^2 + 4$ (x は実数, $-2 < x < 0$) について考える。曲線 C 上の点 A における法線を l とする。 l と x 軸との交点を P , 原点を O としたとき, 線分 OP の長さの最大値を M とする。 $\frac{9}{\sqrt{42}}M$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 八 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

