〈補足〉

数学（医学部医学科，総合理工学部数理科学科）

２ページ

大問 $\boxed{3}$ （２）の解答において，

x または y のみを用いて表してもよい。

平成３０年度入試

個別学力試験問題（前期日程）

数　　学

［医学部・医学科
総合理工学部・数理科学科］

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は２ページ，解答用紙は４枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) n が 3 で割って 1 余る自然数であるとき，$1+n+n^2$ は 3 の倍数であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対し，$n(n+1)(1+n+n^2)$ は 3 の倍数であることを示せ。

(3) すべての自然数 n, k に対し，

$$n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)(1+n+n^2+\cdots+n^{k+1})$$

は $k+2$ の倍数であることを示せ。

$\boxed{2}$ 曲線 C を時刻 t $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ によって

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = y(t),\ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

と媒介変数表示される動点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡とする。また，$0 < x < 1$ のとき，$\mathrm{P}(x, y)$ における曲線 C の接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-\pi x}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

で与えられているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 時刻 $t = \dfrac{\pi}{4}$ のときの点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ。

(2) 時刻 t $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における点 P の y 軸方向の速度 $\dfrac{dy}{dt}$ を t を用いて表せ。

(3) $y(t)$ を t を用いて表せ。

(4) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ $\triangle$AOP が次の条件 (i), (ii) をみたしている。

(i) $OA = 1$

(ii) $\angle APO = 60^\circ$, $0^\circ < \angle AOP < 90^\circ$, $0^\circ < \angle OAP < 90^\circ$

直線 AP に関して O と対称な点を B とし，直線 BP に関して A と対称な点を C とおき，線分 OB と線分 AP の交点を M, 線分 OB と線分 AC の交点を Q とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 点 O, P, C が一直線上にあることを示せ。

(2) $x = OM$, $y = AM$ とするとき，線分 OP, AP, BQ の長さをそれぞれ x, y を用いて表せ。

(3) $\theta = \angle AOB$ とする。条件 (i), (ii) をみたす $\triangle$AOP のうちで，線分 OC の長さが最大となる場合の θ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 2 枚のコインを同時に投げたとき，共に表が出るか共に裏が出れば一致が起こったという。大小 2 つの公正なコインを同時に投げる操作を n 回繰り返したとき，連続して一致が起こった回数の最大値が M である確率を $p(n, M)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $p(4, 2)$ を求めよ。

(2) $p(2k, k)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(2k, k)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{m}{2^m} = 0$ であることを用いてもよい。