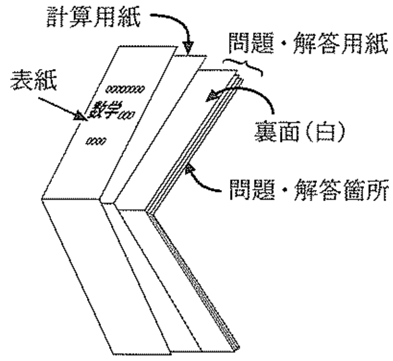
平成30年度入学試験問題

数　学　　202

（前　期　日　程）

表紙も問題・解答用紙も全て
表面のみに印刷している。



（注意事項）

1 問題・解答用紙および計算用紙は，係員の指示があるまで開かないこと。

2 この表紙を除いて，**問題・解答用紙は４枚，計算用紙は１枚**である。
用紙の折り方は図のようになっているので注意すること。

3 **解答は，問題と同一の紙面の指定された解答箇所に書くこと。**指定された解答箇所以外に書いたものは採点しない。また，**裏面に解答したものも採点しない。**

4 **解答開始後，各問題・解答用紙の「受験番号」欄に受験番号をはっきり記入すること。**

5 計算用紙以外にも，表紙や問題・解答用紙の裏面を計算のために用いてよい。

6 表紙，計算用紙を含め，配布した用紙はすべて回収する。

計 算 用 紙

受験番号	第　　　　　　番

数　学　202　その１

第１問　n を自然数とし，$S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ とする。

(1)　$x > 0$ のとき $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ を示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < S_n < 2\sqrt{n} - 1$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

[第１問の解答箇所]

小 計	点

受験番号	第　　　　　　番

数　学　202　その2

第2問　$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上に点 $\mathrm{P}(1,1)$ をとり，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ となる点 $\mathrm{Q}\left(x,\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ をとる。ただし，O は原点とする。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{\cos 2\theta}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ となる点 Q はちょうど 2 個存在することを示せ。また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，その 2 点間の距離を求めよ。

(3)　点 Q を与える 2 点を $\mathrm{Q}_1\left(x_1,\dfrac{1}{x_1}\right)$，$\mathrm{Q}_2\left(x_2,\dfrac{1}{x_2}\right)$ $(x_1<x_2)$ とする。さらに，$a_1<0<b_1$ とし，4 点 $\mathrm{A}(a_1,a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,b_2)$，$\mathrm{Q}_3\left(-x_1,-\dfrac{1}{x_1}\right)$，$\mathrm{Q}_4\left(-x_2,-\dfrac{1}{x_2}\right)$ を考える。A，B，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 が原点を中心とする正六角形の頂点になるとき，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ となることを示せ。また，このときの A，B の座標を求めよ。

［第2問の解答箇所］

小 計	点

受験番号	第　　　　　　番

数　学　202　その3

第3問　曲線 $y=e^{3x}$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^{3t})$ における接線および法線と x 軸の交点をそれぞれ $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ および $\mathrm{R}(b,\ 0)$ とする。曲線 C, 2 直線 $x=a$, $x=t$ および x 軸で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=e:9$ を満たす t の値を求めよ。

(2)　$S(t)=e-1$ を満たす t の値を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $T(t)$ とする。$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{e^{6t}S(t)}{T(t)}$ を求めよ。

[第3問の解答箇所]

小 計	点

受験番号	第　　　　　　番

数　学　202　その4

第4問　n を 3 以上の整数とする。n 人がそれぞれ 1 個ずつさいころを持っている。n 人が同時にさいころを投げ，出た目が 2 種類のときは小さい目を出した人を敗退とし，その後の勝負には加わらない。出た目が 1 種類あるいは 3 種類以上のときは誰も敗退しない。敗退しなかった人が 2 人以上のときは同様の勝負を繰り返す。最後に残った 1 人を優勝者とする。ただし，$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$ を利用してもよい。

(1)　1 回目の勝負で優勝者が決まる確率を求めよ。

(2)　1 回目の勝負では誰も敗退しない確率を求めよ。

(3)　1 回目の勝負では敗退する人はでるが優勝者が決まらず，2 回目の勝負で優勝者が決まる確率を求めよ。

［第4問の解答箇所］

小 計	点