平 成 31 年 度

数　　学

注意事項

1. 問題は4題で，すべて必答問題です。
2. 解答はすべて別紙(解答用紙4枚)の該当する欄に記入しなさい。
3. 解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「**裏面に続く**」と記入し，表面の下の部分を持って上にめくり記入しなさい。表面とは書く方向が反対になります。
4. **図**や**グラフ**は解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて，ていねいに描きなさい。
5. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して，**論述式**の答案を読みやすく書きなさい。
6. 問題用紙の余白は，下書きや**ミスがないかどうか見直す**のに十分活用しなさい。

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) n を 3 以上の整数，x を正の実数とする。このとき

(a) 不等式

$$(1+x)^n > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$$

を証明せよ。

(b) 極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{(1+x)^n}$$

の収束，発散を調べ，収束するときにはその値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad 3a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義する。

(a) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(b) 上で求めた a_n に対して，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n$$

の収束，発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ。

2 以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $x > \sin x$ を証明せよ。

(2) 不等式

$$\frac{1}{6} < \sin 10^\circ < \frac{\pi}{18}$$

を証明せよ。

3 関数$f(x)$はすべての実数a, b, cに対して

$$f(a)f(b-c)+f(b)f(c-a)+f(c)f(a-b)=0$$

を満たすものと仮定する。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) すべての実数xに対して$f(-x)=-f(x)$が成立することを証明せよ。

(2) 0以上のすべての整数n，および，すべての実数x, yに対して

$$f\left(\frac{y}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}f(x+ky)=f\left(x+\frac{n}{2}y\right)f\left(\frac{n+1}{2}y\right)$$

が成立することを証明せよ。

(3) $f(x)$はすべての実数xで連続かつ$x=0$で微分可能で$f'(0)=1$と仮定する。$f(x)$の原始関数の1つを$F(x)$とすれば，すべての実数s, tに対して

$$\frac{F(t)-F(s)}{2}=f\left(\frac{s+t}{2}\right)f\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

が成立することを証明せよ。

4 A，B を空でない事象とする。このとき，以下の 2 つの条件 p，q が同値であることを証明せよ。

p ：A，B は独立である。

q ：点 O(0，0)，点 Q$(P(A \cap B),\ P(A \cap \overline{B}))$，点 R$(P(\overline{A} \cap B),\ P(\overline{A} \cap \overline{B}))$ は同一直線上にある。ただし，$P(A)$ は事象 A が起こる確率を表すものとする。