数　　学

（数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数Ａ，数Ｂ）

9：00〜11：00

注　　意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。
3. 解答用紙は

解答用紙番号		解答用紙番号	
数学０－１	（問1用），	数学０－２	（問2用），
数学０－３	（問3用），	数学０－４	（問4用），
数学０－５	（問5用）の５枚である。		

4. 解答用紙は５枚とも全部必ず提出せよ。
5. **受験番号および座席番号（上下２箇所）は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。**
6. 各問に対する解答は，それぞれ３で指定された解答用紙に記入せよ。ただし，裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 下書き用紙は回収しない。

解答上の注意

採点時には，結果を導く過程を重視するので，必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

1 pを負の実数とする。座標空間に原点Oと3点A$(-1, 2, 0)$, B$(2, -2, 1)$, P$(p, -1, 2)$があり，3点O，A，Bが定める平面をαとする。また，点Pから平面αに垂線を下ろし，αとの交点をQとする。

(1) 点Qの座標をpを用いて表せ。

(2) 点Qが△OABの周または内部にあるようなpの範囲を求めよ。

2 nを自然数とし，$a_n = n(n+1)$とする。さらに，a_nとa_{n+3}の最大公約数をd_nとする。

(1) d_nは偶数であることを示せ。

(2) d_nは8で割り切れないことを示せ。

(3) pを5以上の素数とするとき，d_nはpで割り切れないことを示せ。

(4) $d_n \leqq 12$を示せ。また，$d_n = 12$となるようなnを1つ求めよ。

3 tを$0 < t < 1$を満たす実数とする。0，$\dfrac{1}{t}$以外のすべての実数xで定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

(1) $f(x)$は極大値と極小値を1つずつもつことを示せ。

(2) $f(x)$の極大値を与えるxの値をα，極小値を与えるxの値をβとし，座標平面上に2点P$(\alpha, f(\alpha))$，Q$(\beta, f(\beta))$をとる。tが$0 < t < 1$を満たしながら変化するとき，線分PQの中点Mの軌跡を求めよ。

4 nを3以上の自然数とする。2つの箱XとYがあり，どちらの箱にも1からnまでのn枚の番号札が入っている。

AとBの2人のうち，Aは箱Xから札を1枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする。Bは箱Yから札を1枚取り出し，もし取り出した札の番号が3からnまでのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が1または2のいずれかであれば，その札を箱Yに戻し，再び箱Yから札を1枚取り出し，取り出した札の番号をBの得点とする。

(1) mをn以下の自然数とする。Bの得点がmになる確率を求めよ。

(2) Aの得点よりBの得点が大きくなる確率p_nを求めよ。

5 $f(x)$を区間$[0,\ \pi]$で連続な関数とする。関数$f_1(x)$, $f_2(x)$, …… を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$
$$f_{n+1}(x) = 2\cos x + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める。さらに，自然数nに対して

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt,\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$$

とおく。

(1) a_{n+1}, b_{n+1}をa_n, b_nを用いて表せ。

(2) $c_n = a_n - 1$とおく。このとき，$c_{n+2} = -c_n$が成立することを示し，一般項c_nをa_1とb_1を用いて表せ。

(3) a_n, b_nがnによらない定数となるような$f(x)$を1つ求めよ。