

入学試験問題（1次）

数 学

平成31年1月28日

9時00分—10時20分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないこと。
- 2 この問題冊子は表紙・白紙を除き9ページである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所等があった場合は申し出ること。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用すること。
- 4 解答は、各設問ごとに一つだけ選び、解答用紙の所定の解答欄の該当する記号を塗りつぶすこと。
- 5 解答を訂正する場合は、消しゴムできれいに消すこと。
- 6 監督員の指示に従って、問題冊子の表紙の指定欄に受験番号を記入し、解答用紙の指定欄に受験番号、受験番号のマーク、氏名を記入すること。
- 7 この問題冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号				
------	--	--	--	--

上の枠内に受験番号を記入しなさい。

設問ごとに、与えられた選択肢の中から最も適当なもの一つだけを選び、解答用紙の該当する記号を塗り潰せ。

1 $A = x^3 - 2y^2x + 4y^3$, $B = x + 2y$ を x についての整式とみて、 A を B で割った余りを求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

2 $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 5$, $\log_b a + \log_c b + \log_a c = \frac{17}{4}$ がともに成立しているものとする ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$)。

$\frac{8}{683} \{(\log_a b)^4 + (\log_b c)^4 + (\log_c a)^4\}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

3 自然数 $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ (n は自然数) を割り切ることができる整数 m ($2 \leq m \leq 9$) のなかで最大なものを求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

4 複素数 z は $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ を満たしている。 $z^{10} + \frac{1}{z^{10}}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

5 2次方程式 $25x^2 - 35x + 2k = 0$ の2つの解がそれぞれ $\sin \theta$, $\cos \theta$ であるとする。 k の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

6 3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$ が 1, 2 を解にもつとき, もう1つの解を c とする。 $|b + a - c|$ の値を求めよ。(a, b は実数)

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

7 方程式 $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$, ($x^2 + 18x + 45 \geq 0$) について, すべての実数解の和を p , すべての実数解の積を q とする。 $p + q$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

8 a は自然数の定数とする。方程式 $\log_2(x^2 + 3x + 0.25) = a + \log_2 x$ が実数解をもつとき, a のとりうる値の最小値を m とする。 m の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

9 $\triangle ABC$ において, 辺 AB , BC , CA の長さがそれぞれ $b + 1$, $ab + a$, a となり, $\cos A = -\frac{1}{a}$, $\cos C = \frac{b}{a^2}$, であるとする。
 $\left| \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right|$ の値を求めよ。 (a, b は実数 $a > 0, b > 0$)
 (ただし, $\triangle ABC$ の $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C で表記する)

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

10 $\triangle ABC$ について考える。 $AB = AC$, $BC = 16\sqrt{2}$, A から BC に下ろした垂線の長さを 32 とする。この $\triangle ABC$ の内接円の半径を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

11 実数 x, y が $2|x - 3| + 3|y - 2| \leq 6$ を満たすとき、 $x^2 + y^2$ の最大値を M , 最小値を m とする。 $M - 13m$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

12 袋の中に 2 個の白玉と n 個 (n は自然数) の赤玉が入っている。この袋から同時に 2 個の玉を取り出すものとする。白玉の数が 1 個だけの場合の確率を $P(1)$, 2 個とも白玉である場合の確率を $P(2)$ とする。 $\frac{P(1)}{P(2)} = 12$ となるときの n の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

13 座標平面上の3つの定点，原点 $O(0, 0)$ ， $A(0, 1)$ ， $B(4, 3)$ と任意の点 P について考える。 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 4 \vec{OA} \cdot \vec{OB}$ が成立しているとき，点 P の軌跡は異なる2つの点 $M(m, 0)$ ， $N(n, 0)$ で x 軸と交わる。 $|m + n|$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

14 座標平面において，点 $P(1, 0)$ を原点 O を中心として 2θ (θ は正の角) だけ回転させた点を Q とし，点 $R\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を点 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心として θ だけ回転させた点を B とする。線分 QB の長さの最大値を M とするとき， $2\sqrt{6}M$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

15 数列 $\{a_n\}$ は， $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = 2a_n - n^2 + 25n + 5$ (n は自然数) を満たしている。 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ であるとき， $S_n - 2a_n$ を最小にする n を P とする。 $|P - 20|$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

16 曲線 $C: y = x^2 - 13$ 上に存在する異なる 2 つの点 P, Q について考える。線分 PQ と y 軸は、点 $A(0, -8)$ で交わる。線分 PQ の中点の軌跡と x 軸で囲まれる図形の面積を S としたとき、 $\frac{3}{8}S$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 シ 3 ス 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

17 関数 $f(x) = e^{ax} \sin bx$ について考える (a, b は実数)。($b \neq 0$)

$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$ がすべての x について成立するとき、 $a^2 + b^2$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 シ 3 ス 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

18 曲線 $C: y = x^3 - 6x^2$ について考える。点 $A(4, k)$ (k は整数) から曲線 C に異なる 3 本の接線が引けるとき、 k のとりうる値の個数を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 シ 3 ス 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

19 曲線 $C: y = x^3$ 上に存在する原点 $O(0, 0)$, 点 $A(1, 1)$,

点 $P(t, t^3)$ ($0 < t < 1$, t は実数) について考える。線分 OP と曲線 C , 線分 PA と曲線 C で囲まれた図形のそれぞれの面積を S_1, S_2 と表記する。 $S_1 + S_2$ は $t = k$ のとき最小値をとる。 $9k^2$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

20 曲線 $C: y = x + 2 \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$), 直線 $l: y = k$ について考える。

曲線 C , 直線 l , $x = 0$, $x = 2\pi$ で囲まれた図形を直線 l の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。 V が最小となるときの k の値を m としたとき,
 $a < m < a + 1$ を満たす自然数 a が存在する。 a の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

次の文章を読み、以下の問い(問題 21～25)に対する選択肢から最も適当なものを一つだけ選べ。

曲線 $C: y = x^2$ について考える。曲線 C 上の点 $P_1(p, p^2)$ ($p > 0$, p は実数) における接線と x 軸との交点を Q_1 とし、点 Q_1 を通って x 軸に垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 、点 P_2 における曲線 C の接線と x 軸との交点を Q_2 と定める。

その後も同じ操作を繰り返し、曲線 C 上に点 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ 、 x 軸上に点 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ をつくることとする。

A 点 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ の x 座標をそれぞれ $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ と表記すると、数列 $\{x_n\}$ は初項 $\boxed{21}$ 、公比 $\boxed{22}$ の等比数列になる。

$\boxed{21}$

- ㉠ p ㉡ $\frac{p}{2}$ ㉢ $\frac{p}{3}$ ㉣ $\frac{p}{4}$ ㉤ $\frac{p}{6}$
 ㉥ $\frac{p}{8}$ ㉦ $\frac{p}{10}$ ㉧ $\frac{p}{12}$ ㉨ $\frac{p}{18}$ ㉩ $\frac{p}{24}$

$\boxed{22}$

- ㉠ 1 ㉡ $\frac{1}{2}$ ㉢ $\frac{1}{3}$ ㉣ $\frac{1}{4}$ ㉤ $\frac{1}{6}$
 ㉥ $\frac{1}{8}$ ㉦ $\frac{1}{10}$ ㉧ $\frac{1}{12}$ ㉨ $\frac{1}{16}$ ㉩ $\frac{1}{24}$

B 図形 $P_n Q_n P_{n+1}$ の面積 S_n とは、接線 $P_n Q_n$ 、直線 $Q_n P_{n+1}$ 、曲線 C の点 P_n から点 P_{n+1} までの曲線部分で囲まれた図形の面積を意味することとする。図形 $P_1 Q_1 P_2, P_2 Q_2 P_3, \dots, P_n Q_n P_{n+1}, \dots$ の面積をそれぞれ $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ としたとき、数列 $\{S_n\}$ は初項 23、公比 24 の等比数列になる。

23

- ア p^3
 カ $\frac{p^3}{2}$
 サ $\frac{p^3}{4}$
 シ $\frac{p^3}{8}$
 ス $\frac{p^3}{12}$
- ハ $\frac{p^3}{16}$
 マ $\frac{p^3}{20}$
 ヤ $\frac{p^3}{24}$
 ラ $\frac{p^3}{28}$
 ワ $\frac{p^3}{32}$

24

- ア 1
 カ $\frac{1}{2}$
 サ $\frac{1}{3}$
 シ $\frac{1}{4}$
 ス $\frac{1}{6}$
- ハ $\frac{1}{8}$
 マ $\frac{1}{10}$
 ヤ $\frac{1}{12}$
 ラ $\frac{1}{16}$
 ワ $\frac{1}{24}$

C 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束し、その値は、25 となる。

25

- ア p^3
 カ $\frac{p^3}{3}$
 サ $\frac{p^3}{6}$
 シ $\frac{p^3}{9}$
 ス $\frac{p^3}{12}$
- ハ $\frac{p^3}{15}$
 マ $\frac{p^3}{18}$
 ヤ $\frac{p^3}{21}$
 ラ $\frac{p^3}{24}$
 ワ $\frac{p^3}{27}$

