平成31年度 入学試験問題

数学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び解答用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 試験開始後は，すべての解答用紙に受験番号（2か所）・氏名を記入すること。
3. 各志願者は，下の表 **(1)** に指示した問題を解答すること。ただし，教育学部については志望するコース（専攻）により，下の表 **(2)** のように分類する。
4. 解答は，必ず問題と同じ番号の解答用紙のおもて面に記入すること。
5. 解答は明瞭に書くこと。
6. 解答用紙は持ち出さないこと。

表 (1)

志望学部	問題の番号
教育学部A 経済学部 環境科学部 水産学部	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
教育学部B 薬学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
医学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$
歯学部 工学部	$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$

表 (2)

分類	志望するコース（専攻）
教育学部A	小学校教育コース 幼稚園教育コース（こども保育専攻） 特別支援教育コース 中学校教育コース（社会専攻，技術専攻）
教育学部B	中学校教育コース（数学専攻）

1 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\cos^2 x-\sin x\ (0 \leqq x < 2\pi)$ の最大値および最小値を求めよ。また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n+6n^2+4n-1\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

(4) 平面上の 3 つのベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ において

$$|\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{b}|=3|\overrightarrow{c}|=6k \quad (k \text{ は正の定数})$$

$$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$$

が成り立っている。このとき，$\overrightarrow{c}$ を $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で表し，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を k を用いて表せ。また，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を求めよ。

2 実数 α, β $(\alpha \leqq \beta)$ に対し，p, q を $p = \alpha + \beta$, $q = \alpha\beta$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $p = 3, q = -1$ のとき，α と β の値を求めよ。

(2) 実数 α, β を解とする x の 2 次方程式を p, q を用いて表せ。また，このときの p, q が満たす不等式を求めよ。

(3) (2) の実数 α, β が，さらに不等式 $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3 \leqq 0$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p, q)$ が存在する領域 E を pq 平面に図示せよ。また，領域 E の面積 S を求めよ。

(4) (3) のとき，$\alpha\beta + \alpha + \beta$ の最大値および最小値を求めよ。また，そのときの実数 α と β の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 3 次方程式 $x^3 - 3px + p = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつように，実数 p の値の範囲を定めよ。

(2) 関数 $y = \log x\ (x > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \log t)$ における接線を ℓ とする。また，点 P を通り，ℓ に垂直な直線を m とする。2 本の直線 ℓ, m および y 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S = 5$ となるときの点 P の座標を求めよ。

(3) 空間内に，3 点 $\mathrm{A}(3, -1, 1)$, $\mathrm{B}(0, 2, 4)$, $\mathrm{C}(1, 0, 4)$ がある。点 C から直線 AB に垂線を引き，交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくとき，実数 t の値と線分 CH の長さを求めよ。

(4) 原点を O とする座標平面上に，曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ があり，C 上に x 座標を t とする第 1 象限の点 P をとる。このとき，点 P から x 軸および y 軸に垂線を下ろし，交点をそれぞれ Q, R とする。四角形 OQPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

4 $\triangle$OAB の 2 辺 OA，OB 上にそれぞれ点 C，D があり，直線 CD は $\triangle$OAB の重心 G を通るものとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\,\vec{a}\ (0<x<1),\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=y\,\vec{b}\ (0<y<1)$$

とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{CG}:\mathrm{GD}=t:(1-t)$，$0<t<1$ とする。このとき，x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(2) y を x の式で表せ。また，$0<y<1$ より x の値の範囲を求めよ。

(3) $\triangle$OCD の面積を S_1，$\triangle$OAB の面積を S_2 とし，$f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}$ とする。関数 $f(x)$ の増減表をつくり，$f(x)$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。

5 曲線 $C: y=\sin x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$ 上の x 座標が 0 の点を A，x 座標が $\dfrac{2}{3}\pi$ の点を B とする。点 $\mathrm{P}(p, \sin p)$ が曲線 C 上を動くとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AP の中点を $\mathrm{M}(x, y)$ とする。ただし，P が A と一致するときは，中点 M は A とする。このとき，x と y をそれぞれ p を用いて表せ。また，M がえがく曲線を $C_1: y=f(x)$ とするとき，関数 $f(x)$ と x の範囲を求めよ。

(2) 線分 PB の中点を $\mathrm{N}(x, y)$ とする。ただし，P が B と一致するときは，中点 N は B とする。このとき，x と y をそれぞれ p を用いて表せ。また，N がえがく曲線を $C_2: y=g(x)$ とするとき，関数 $g(x)$ と x の範囲を求めよ。さらに，$y=g(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3) 曲線 C と直線 AB とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(4) 3 つの曲線 C, C_1, C_2 の概形をえがき，3 つの曲線で囲まれる図形の面積 T を求めよ。

6 2次方程式 $x^2-x+1=0$ の2つの解を α, β $(-\pi < \arg\beta < \arg\alpha < \pi)$ とする。

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = \alpha^n + \beta^n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$b_n = (\alpha\beta)^n - (\alpha^n + \beta^n) + 1 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, b_1, b_2 の値を求めよ。

(2) α, β を極形式で表し，一般項 a_n, b_n を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して，a_n, b_n は整数であることを示せ。

(4) 複素数平面上の異なる3点 $\mathrm{A}(1), \mathrm{B}(\alpha^n), \mathrm{C}(\beta^n)$ について，等式

$$b_n = |\alpha^n - \beta^n|^2$$

が成り立つとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ はどのような形になるか。また，このときの a_n と b_n の値を求めよ。

7 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を次のように定める。

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x} \qquad (x > 0)$$

$$g_n(x) = x(x-1)^{2n} \quad (x \geqq 0)$$

ただし，a_n は各自然数 n に対して定まり，x とは無関係な正の実数である。以下の問いに答えよ。

(1) $x = t\ (0 < t < 1)$ における $y = f_n(x)$ の接線を ℓ とするとき，ℓ の式を t および a_n を用いて表せ。

(2) (1) の接線 ℓ は，$x = t\ (0 < t < 1)$ において，$y = g_n(x)$ にも接しているものとする。すなわち，$f_n(t) = g_n(t)$, $f_n'(t) = g_n'(t)$ が同時に成り立つ。このとき，t および a_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 曲線 $y = g_n(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき，S_n を n の式で表せ。

(4) (2) において，接線 ℓ と x 軸および y 軸とで囲まれる図形の面積を T_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n}$ の値を e を用いて表せ。ただし，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とする。

$\boxed{8}$ 方程式 $z^3 = 1$ の解を z_1, z_2, z_3 とし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$ とする。複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$, $\mathrm{B}(z_2)$, $\mathrm{C}(z_3)$ をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $z_1 + z_2 + z_3$，$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$，$z_1z_2z_3$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，線分の長さの 2 乗の和 $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ および線分の長さの積 $\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BP} \cdot \mathrm{CP}$ の値を，α を用いてそれぞれ表せ。

(3) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，α が $\dfrac{z_2 - \alpha}{z_3 - \alpha} = ri$ $(r > 0)$ を満たすとき，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ の最大値および，そのときの r と α の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(4) (3) において，$\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 + \mathrm{CP}^2$ が最大となるときの $\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BP} \cdot \mathrm{CP}$ の値を求めよ。