

数学問題紙

平成 31 年 2 月 25 日

自 11:00

至 12:40

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙は 1 から 5 までの 5 ページである。
2. 解答用紙は ③ から ⑥ までの 4 枚である。
3. 解答はすべて解答用紙のおもてのみを用いて書くこと。
4. 問題紙と草案紙は持ち帰ること。

1

次の各問に答えよ.

- (1) 一辺の長さが a である正八面体の体積を a を用いて表せ.
- (2) a を定数とする. このとき $a \leq x \leq a + 1$ の範囲で定義された関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ の最大値が 1 であるような a の条件を求めよ.
- (3) (i) n を自然数とする. 2^n が 4 桁の数になるときの n を求めよ.
(ii) 5^{130} は何桁の数か.

- 2 四面体 $OABC$ における4つの辺 OA , AB , BC , OC 上にそれぞれ点 P , Q , R , S をとる. ただし, $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ に対して,
辺 OA を $s : (1 - s)$ に内分する点を P
辺 OC を $s : (1 - s)$ に内分する点を S
辺 AB を $(1 - t) : t$ に内分する点を Q
辺 BC を $t : (1 - t)$ に内分する点を R
とする.

- (1) 4点 P , Q , R , S が同一平面上にあることを示せ.

三角形 XYZ の面積を S_{XYZ} と表すものとする. 三角形 PQR の重心 K と三角形 PRS の重心 L を結ぶ線分 KL を $S_{PRS} : S_{PQR}$ に内分する点を G とする. また, 三角形 PQS の重心 M と三角形 QRS の重心 N を結ぶ線分 MN を $S_{QRS} : S_{PQS}$ に内分する点を G' とする.

- (2) G と G' が一致することを示せ.

- (3) 3点 O , B , G を通る平面は AC の中点を通ることを示せ.

3

次の各問に答えよ.

- (1) N を 0 以上の整数とすると、 2^N を 3 で割った余りを求めよ.
- (2) n を自然数、 a を $0 < a < 1$ をみたす実数とする. 表か裏のどちらかが必ず出るコインがあり、このコインの表が出る確率を a とする. このコインを投げる試行を n 回繰り返すとき、第 i 回目の試行 ($i = 1, 2, \dots, n$) において、表が出たときに $x_i = 0$ 、裏が出たときに $x_i = 1$ と定め、 n 回の試行の結果、 x_1, x_2, \dots, x_n から得られる 0 以上の整数 X を

$$X = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} x_i$$

と定める. X が 3 の倍数となる確率を p_n とする.

- (i) $a = \frac{1}{2}$ とするとき、 p_n を n を用いて表せ.
- (ii) p_1, p_2, p_3, p_4 をそれぞれ a の多項式で表せ. ただし、多項式は展開して答えること.
- (iii) a が 0 から 1 の範囲を動くとき、 p_2 と p_4 の最小値をそれぞれ求めよ.

4

定数 $a > 0$ に対して、次の媒介変数表示された座標平面上の曲線を C とする：

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 曲線 C の長さを a を用いて表せ.

C 上の点 $A(a(\theta - \sin \theta), a(1 - \cos \theta))$ において、 $0 < \theta < 2\pi$ では法線上に点 B を線分 AB の長さが 1 で、 B の y 座標が A の y 座標より大きくなるようにとり、 A の座標が $(0, 0)$, $(2\pi a, 0)$ のときの B はそれぞれ $(-1, 0)$, $(2\pi a + 1, 0)$ とする.

(2) 点 B の座標を a と θ を用いて表せ.

(3) 点 A が曲線 C 上を $\theta = 0$ から $\theta = 2\pi$ まで動いたときの点 B の軌跡を C_1 とするとき、曲線 C_1 の長さを a を用いて表せ.

