

平成 29 年度
医学科一般入試(前期日程)

問題冊子

数 学

(注 意)

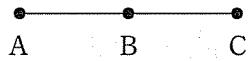
1. 問題冊子は試験開始の合図があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙のほか 2 ページである。
3. 試験中に問題冊子及び解答用紙の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
4. 解答用紙のすべてに受験番号及び氏名をはっきり記入すること。
5. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に明瞭に記入すること。
ただし解答欄が不足する場合は、下書き欄(裏面)にはみだしてもよい。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は、無効にすることがある。
7. 本学受験票及び大学入試センター試験受験票を机の右上に出しておくこと。
8. 試験時間は 120 分である。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答用紙は持ち帰らないこと。

数 学

(各問 50 点)

1

図のように 3 つの頂点 A, B, C が線分でつながっている。



この図形の上を点 P が次の規則に従って動く。以下, n は 0 以上の整数である。

- ・時刻 0 に点 P は頂点 A にいる。
- ・時刻 n に点 P が頂点 A にいる場合, 時刻 $n + 1$ において, 確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 A にとどまっているか, 確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 B に移動している。
- ・時刻 n に点 P が頂点 B にいる場合, 時刻 $n + 1$ において, 確率 $\frac{1}{3}$ で頂点 B にとどまっているか, 確率 $\frac{1}{3}$ で頂点 A に移動しているか, 確率 $\frac{1}{3}$ で頂点 C に移動している。
- ・時刻 n に点 P が頂点 C にいる場合, 時刻 $n + 1$ において, 確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 C にとどまっているか, 確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 B に移動している。

時刻 n に点 P が頂点 A, B, C にいる確率をそれぞれ a_n , b_n , c_n とする。

(1) a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} を, a_n , b_n , c_n を用いて表せ。

(2) (1)の結果と $a_n + b_n + c_n = 1$ を利用して, b_n を n の式で表せ。

(3) $p_n = 2^n a_n$ とおく。 p_n を n の式で表せ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ。

2

(1) k , l を自然数として, 異なる k 個の複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ と異なる l 個の複素数 β_1, \dots, β_l を考える。任意の複素数 z について, k 個の複素数 $z - \alpha_1, \dots, z - \alpha_k$ の積と l 個の複素数 $z - \beta_1, \dots, z - \beta_l$ の積が等しい, すなわち

$$(z - \alpha_1) \times \cdots \times (z - \alpha_k) = (z - \beta_1) \times \cdots \times (z - \beta_l)$$

とする。このとき, $k = l$ であつて, β_1, \dots, β_l を並び替えると $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ になることを示せ。

(2) n を自然数とする。方程式 $z^n = 1$ の解は, ある複素数 ω を用いて表される n 個の複素数 ω^k ($k = 1, 2, \dots, n$) であることを示せ。

(3) m, n を自然数とする。 m が n の約数であることは, 方程式 $z^m = 1$ の任意の解が方程式 $z^n = 1$ の解になるための必要十分条件であることを示せ。

3 四面体 OABC において、 $\triangle ABC$ の重心を G、 $\triangle OAB$ の重心を H とする。

(1) 直線 OG と直線 CH は交わることを示せ。

以下では、直線 OG と直線 CH の交点を I として、 $OI = AI = BI = CI$ とする。

(2) \vec{OI} を \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} を用いて表せ。

(3) $OA = BC$, $OB = CA$, $OC = AB$ を示せ。

(4) $OA = 1$, $OB = \sqrt{2}$, $OC = \sqrt{2}$ のとき、Iを中心として、平面 OAB とただ一つの共有点を持つような球の半径を求めよ。

4 a , b を実数とする。曲線 $y = e^x$ と直線 $y = ax + b$ は $0 \leq x \leq 1$ の範囲で異なる 2 点で交わるとする。区間 $0 \leq x \leq 1$ を定義域とする関数

$$f(x) = |e^x - (ax + b)|$$

を考える。

(1) $a > 0$ を示せ。

(2) $b > 0$ を示せ。

(3) $f(x)$ を最大にする x の値が 3 個存在するとき、 a と b を求めよ。

(4) (3)のときの a , b に対して、

$$\int_0^1 e^x dx \leqq \int_0^1 (ax + b) dx$$

を示せ。

