平成３１年度入試

個別学力試験問題（前期日程）

数　　学

［ 医学部・医学科
総合理工学部・数理科学科 ］

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は２ページ，解答用紙は４枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 三角形$\triangle$ABCの辺BC, CA, ABの長さをそれぞれa, b, cで表し，$\angle$A, $\angle$B, $\angle$Cの大きさをそれぞれA, B, Cで表す。ただし，$a > b > c$とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sqrt{\dfrac{ab}{2}} < b$を示せ。

(2) $\triangle$ABCの外接円の半径をRとするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$c(1-\cos B) - b(1-\cos C) = 8R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

(3) 辺AB上の点Mと辺AC上の点Nを結ぶ線分MNが$\triangle$ABCの面積を2等分するとき，$\mathrm{MN}^2 \geqq bc(1-\cos A)$が成り立つことを示せ。

(4) $\triangle$ABCの周上の2点PとQを結ぶ線分PQで，$\triangle$ABCの面積を2等分するとき，線分PQの長さの最小値をa, b, cを用いて表せ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) 4つの数字0, 1, 2, 9を並べてできる4桁の正の整数は全部でいくつあるか。ただし，同じ数字を何度使ってもよいものとする。

(2) 4つの数字0, 1, 2, 9を並べてできる正の整数をすべて考えるとき，1500を初めて超えるのは小さい方から数えて何番目の数か。ただし，同じ数字を何度使ってもよいものとする。

(3) a, b, c, dはそれぞれ0, 1, 2, 9のいずれかの値をとるとし，同じ値をとってもよいものとする。放物線$y = x^2 + 2ax + b$と直線$y = 2cx + d$が共有点を持つような組(a, b, c, d)は全部でいくつあるか。

$\boxed{3}$ 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 2,$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{4}, \quad b_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ をみたす実数 α, β の 2 つの組 $(\alpha_1,\ \beta_1)$ と $(\alpha_2,\ \beta_2)$ を求めよ。ただし，$\alpha_1 < \alpha_2$ とする。

(2) (1) で求めた α_1 に対して，数列 $\{a_n + \alpha_1 b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(4) 座標平面において $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{C}_n(a_n,\ b_n)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ の内積とするとき，次の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$$

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)(x > 0)$ と正の定数 a に対して，等式

$$\int_a^x f(t)dt = (\log x)^2 - 2\log x - 8$$

が成り立っているとする。ただし，対数は自然対数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 上の等式をみたす a をすべて求めよ。

(3) $x > 0$ のとき，$\log x < \sqrt{x}$ であることを示し，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

(4) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフをかけ。